

作用素分割法の最適制御問題への応用

松 下 慎 也

概 要

松岡先生が日本大学を定年退職されたことに心よりお祝い申し上げるとともに、これまで多くの有益な助言や発表の機会を与えて頂いた事に感謝申し上げます。

本稿では、松岡先生のお声がけにより参加させて頂いた RIMS 共同研究「関数空間論とその周辺」(2023 年 3 月開催)の講演内容を中心に最近の研究について解説する。

1 はじめに

近年、非線形関数解析学の研究は盛んに行なわれ、著しい進歩を遂げている。非線形関数解析学で本質的な役割を果たす不動点理論の発展に伴い、単調作用素とその周辺の研究も急速に進んでいる([1,6])。下半連続な真凸関数の劣微分は極大単調作用素となるため、その応用性は広く種々の分野で有効に用いられている。

文献 [3] では、極大単調作用素の包含式の解を反復法によって求める問題に対して、作用素のリゾルベントを用いた点列的近似法を提案して近似列の収束性を示した。この成果は複数の凸関数の和を最小化する凸最適化問題の解を近似する解法として応用できる。ここでは、[4] の議論に沿って制御工学における最適制御問題と凸最適化問題の関係を解説し、[3] で提案した点列的近似法を適用することで得られる結果について報告する。

2 最適制御問題

2.1 状態方程式

次の微分方程式を考える。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^d$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ とし、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ とする。(1) は状態方程式と呼ばれ、工学、物理学や生物学、経済学や社会学における時間を変数を持つ制御対象を表現できることが知られている。(1) において $\mathbf{x}(t)$ は時刻 t での状態、 $u(t)$ は制御と呼ばれる。状態方程式には次の例が知られている。

例 2.1. ロケットの状態方程式 [4, Example 7.2] 宇宙空間にあるロケットを状態方程式 (1) で表現すると以下ようになる.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b u(t) \quad (2)$$

ただし, $\mathbf{x}_1(t)$ は時刻 t における位置, $\mathbf{x}_2(t)$ は時刻 t における速度, $u(t)$ はロケットに働く力, $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi} = (\xi_1 \ \xi_2)^T$ は初期状態とする.

状態方程式 (1) が可制御であるとは, 任意の初期状態 $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ に対して, ある終端時刻 $T > 0$ と制御 $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) が存在して, この $u(t)$ によって状態 $\mathbf{x}(t)$ が $t = T$ で $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ となるときをいう. 例 2.1 の状態方程式 (2) は可制御となることが知られている (例えば, [4, Example 7.5] 参照).

2.2 L^1 最適制御問題

次の問題を考える.

問題 2.1. (L^1 最適制御問題) 状態方程式 (1) は可制御とする. 初期状態 $\boldsymbol{\xi}$ と終端時刻 $T > 0$ が与えられているとする. この時, $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ を達成する制御 $u(t)$ で $|u(t)| \leq 1$ ($\forall t \in [0, T]$) を満たし, かつ $\|u\|_{L^1} = \int_0^T |u(t)| dt$ を最小にするものを見つけよ.

問題 2.1 を L^1 最適制御問題といい, その解を L^1 最適制御という. L^1 最適制御問題は最小燃料問題とも呼ばれ, 古くから研究されている (例えば, [2] 参照). 問題 2.1 は所望の条件を満足する無限次元空間 $L^\infty[0, T]$ の関数を見つける問題となる.

一方, 時間軸 $[0, T]$ を離散化することにより, L^1 最適制御問題を有限次元の最適化問題に帰着させる手法が知られている. ここでは, [4, Chapter 9] で議論された離散化によって構成される凸最適化問題 (l^1 最適化問題) を紹介する.

問題 2.2. (l^1 最適化問題)

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \{ \|\mathbf{u}\|_{l^1} + i_{C_1}(\mathbf{u}) + i_{C_2}(\Phi \mathbf{u}) \}, \quad (3)$$

ここで, n は時間軸の分割数, $h = T/n$, $C_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\|_{l^\infty} \leq 1\}$, $C_2 = \{\boldsymbol{\zeta}\}$, $\|\cdot\|_{l^1}$ は l^1 ノルム, $\|\cdot\|_{l^\infty}$ は l^∞ ノルム, $A_d = e^{Ah}$, $\mathbf{b}_d = \int_0^h e^{A_d t} \mathbf{b} dt$, $\Phi = (A_d^{n-1} \mathbf{b}_d, A_d^{n-2} \mathbf{b}_d, \dots, \mathbf{b}_d)$, $\boldsymbol{\zeta} = -A_d \boldsymbol{\xi}$, i_C は集合 C に対する指示関数, つまり

$$i_C(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & (\mathbf{x} \in C) \\ \infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする.

問題 2.2 の解は, 問題 2.1 の解 (つまり所望の制御 $u(t)$) を近似するサイズ n のベクトルとなることが知られている. ここで, 時間軸の分割数 n を大きくした問題 2.2 を解くことで, より精度の高い近似解を得ることができる. 即ち, 大規模な l^1 最適化問題を高速・高精度に解くための最適化アルゴリズム

μ を開発することが重要となる.

2.3 l^1 最適化問題に対する解法

文献 [3] で提案した点列的近似法を問題 2.2 に適用すると, 以下ようになる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{x}}_k = \begin{cases} \mathbf{x}_k & (k: \text{偶数}) \\ \mathbf{x}_k + t(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) & (k: \text{奇数}) \end{cases} \\ \bar{\mathbf{v}}_{i,k} = \begin{cases} \mathbf{v}_{i,k} & (k: \text{偶数}) \\ \mathbf{v}_{i,k} + t(\mathbf{v}_{i,k} - \mathbf{v}_{i,k-1}) & (k: \text{奇数}) \end{cases} \quad (\forall i \in \{1, 2\}) \\ \mathbf{p}_{1,k} = \text{prox}_{\tau \|\cdot\|_{l^1}} \left(\bar{\mathbf{x}}_k - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^2 L_i^T \bar{\mathbf{v}}_{i,k} \right) \\ \mathbf{w}_{1,k} = 2\mathbf{p}_{1,k} - \bar{\mathbf{x}}_k \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_{2,i,k} = \sigma_i(I - P_{C_i}) \left(\frac{1}{\sigma_i} \bar{\mathbf{v}}_{i,k} + \frac{1}{2} L_i \mathbf{w}_{1,k} \right) \\ \mathbf{w}_{2,i,k} = 2\mathbf{p}_{2,i,k} - \bar{\mathbf{v}}_{i,k} \end{array} \right. \quad (\forall i \in \{1, 2\}) \\ \mathbf{z}_{1,k} = \mathbf{w}_{1,k} - \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^2 L_i^* \mathbf{w}_{2,i,k} \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda(\mathbf{z}_{1,k} - \mathbf{p}_{1,k}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z}_{2,i,k} = \mathbf{w}_{2,i,k} + \frac{\sigma_i}{2} L_i(2\mathbf{z}_{1,k} - \mathbf{w}_{1,k}) \\ \mathbf{v}_{i,k+1} = \bar{\mathbf{v}}_{i,k} + \lambda(\mathbf{z}_{2,i,k} - \mathbf{p}_{2,i,k}) \end{array} \right. \quad (\forall i \in \{1, 2\}) \end{array} \right. \quad (4)$$

ここで, $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_{1,0}, \mathbf{v}_{2,0}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_{1,1}, \mathbf{v}_{2,1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, $\lambda \in (0, 2)$, $t \in ((2 - \lambda)/\lambda)$, $L_1 = I_n$, $L_2 = \Phi$, $\text{prox}_{\|\cdot\|_{l^1}}$ は l^1 ノルムに対する近接写像, P_{C_i} は集合 C_i の上への距離射影, $\tau, \sigma_1, \sigma_2 \in (0, \infty)$ は $\tau \sum_{i=1}^2 \sigma_i \|L_i\|^2 < 4$ を満たすとする. この時, (4) によって生成された点列 $\{\mathbf{p}_{1,k}\}$ と $\{\mathbf{z}_{1,k}\}$ は問題 2.2 の解に収束する. (4) を一般化した近似列の構成方法については文献 [3] を参照すると良い.

時間軸の分割数を $n = 1000$ として (4) を問題 2.2 に適用した. (2) の状態方程式における $A, \mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}$ を用いる事にして, 終端時刻を $T = 5$, 初期状態を $\boldsymbol{\xi} = (1, 1)^T$ と設定した. 繰り返し回数 $k = 5000$ における近似解を図 1 の左図に示す. また, 近似解に対応する状態の軌跡 $\{(x_1(t), x_2(t))^T : 0 \leq t \leq 5\}$ を図 1 の右図に示す.

問題 2.2 を解くことで L^1 最適制御問題の近似解を得ることができる. 図 1 の左図から, L^1 最適制御は 0 の値を多くとる制御となり, 得られた制御を現実の問題に利用する際には, 燃料や電力の消費を抑える効果が期待できる. 一方, L^1 最適制御 (図 1 では 0, ± 1 の値を短時間に急激に変化させる制御) は, モーターやエンジンに過度な負担をかける事になるため実用的とは言えない.

2.4 L^1/L^2 最適制御問題

次に, 文献 [5] で提案された以下の問題を考える.

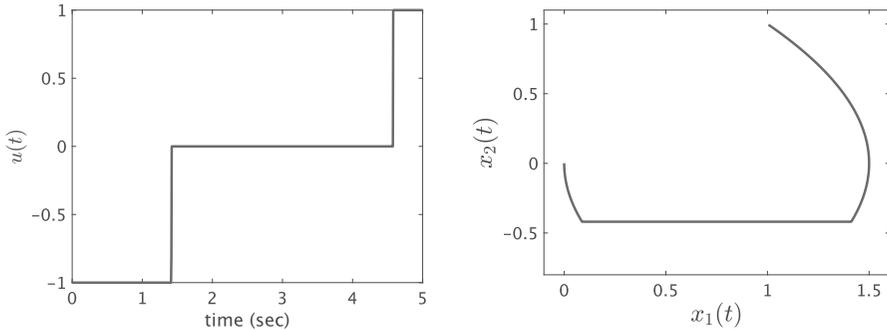


図 1 左図は提案した (4) を適用して得られた近似解のグラフ. 右図は, 近似解に対応する状態 $\{\mathbf{x}(t) = (x_1(t) \ x_2(t))^T (0 \leq t \leq 5)\}$ の軌跡. 初期状態 $\mathbf{x}(0) = (1 \ 1)^T$ から $\mathbf{x}(5) = (0 \ 0)^T$ に遷移しているのがわかる.

問題 2.3. (L^1/L^2 最適制御問題) 状態方程式 (1) は可制御とする. $\eta > 0$ とし, 初期状態 ξ と終端時刻 $T > 0$ が与えられているとする. この時, $\mathbf{x}(0) = \xi, \mathbf{x}(T) = 0$ を達成する制御 $u(t)$ で $|u(t)| \leq 1 (\forall t \in [0, T])$ を満たし, かつ $\eta \|u\|_{L^1} + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2$ を最小にするものを見つけよ. ここで, $\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^T |u(t)|^2 dt}$.

問題 2.3 を L^1/L^2 最適制御問題といい, その解を L^1/L^2 最適制御という. η はノルムの影響を調整するためのパラメータである. 問題 2.1 と問題 2.3 を比較すると, 問題 2.3 には L^2 ノルムの 2 乗の項が追加されている. この工学的な意義については文献 [4, Chapter 10] を参照すると良い. 次の凸最適化問題を考える.

問題 2.4. (l^1/l^2 最適化問題)

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \eta \|\mathbf{u}\|_{l^1} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{l^2}^2 + i_{C_1}(\mathbf{u}) + i_{C_2}(\Phi \mathbf{u}) \right\}, \quad (5)$$

ここで, $\|\cdot\|_p$ は l^p ノルム, その他は問題 2.2 の場合と同じ設定である.

2.5 l^1/l^2 最適化問題に対する解法

文献 [3] で提案した点列的近似法は, 問題の要求に合わせて項 $((1/2) \|\cdot\|_p^2)$ を追加した問題 2.4 にも柔軟に適用できる. 問題 2.4 に対する近似列は (4) に改良を追加することで得られる. 詳細は文献 [3] を参照するとよい. ここでは提案手法を適用して得られる近似解を紹介する.

時間軸の分割数を $n = 1000$ として提案手法を問題 2.4 に適用した. (2) の状態方程式における A, \mathbf{b}, ξ を用いる事にして, 終端時刻を $T = 5$, 初期状態を $\xi = (1, 1)^T$ と設定した. $\eta = 1$ と設定して, 繰り返し回数 $k = 5000$ における近似解を図 2 の左図に示す. また, 近似解に対応する状態の軌跡 $\{(x_1(t) \ x_2(t))^T : 0 \leq t \leq 5\}$ を図 2 の右図に示す.

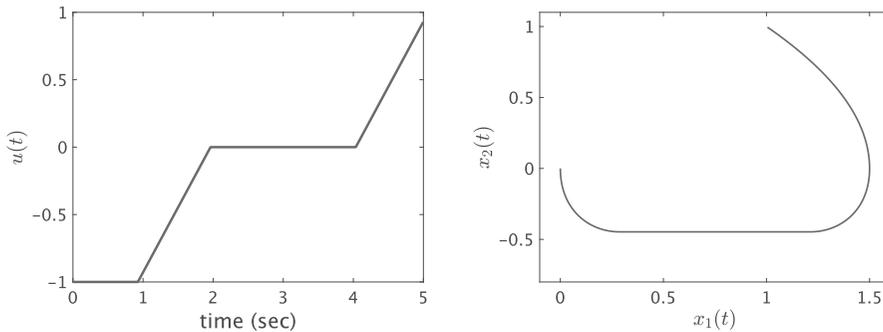


図2 左図は提案手法を適用して得られた近似解のグラフ。右図は、近似解に対応する状態 $\{\mathbf{x}(t) = (x_1(t) \ x_2(t))^T (0 \leq t \leq 5)\}$ の軌跡。初期状態 $\mathbf{x}(0) = (1 \ 1)^T$ から $\mathbf{x}(5) = (0 \ 0)^T$ に遷移しているのがわかる。

図1と図2の左図の近似解を比較すると、図2の方が値の変化が緩やかになっていることがわかる。これにより、 l^1/l^2 最適化問題を解くことでなるべく燃料や電力を消費せず、モータやエンジンへの負担を軽減できる制御を求める事ができるようになる。

3 終わりに

本稿では、文献 [3] で得られた極大単調作用素の包含の解を近似する反復法の結果を、最適制御問題に適用する方法について重点を置いて解説した。

RIMS 共同研究では、幅広い研究分野の先生方と交流する場と研究成果を発表する機会を与えて頂いた。松岡先生に改めて感謝申し上げるとともに、先生の益々のご活躍をお祈り申し上げます。

参考文献

- [1] H.H. Bauschke and P.L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Second Edition, Springer, New York, 2017.
- [2] D.G. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley-Interscience, 1969.
- [3] S. Matsushita, *Convergence analysis of an alternated inertial three-operator splitting algorithm with applications to optimal control problems*, Linear and Nonlinear Analysis (accepted for publication).
- [4] M. Nagahara, *Sparsity Methods for Systems and Control*, nowpublishers, 2020.
- [5] M. Nagahara, D.E. Quevedo, and D. Nešić, *Maximum hands-off control: a paradigm of control effort minimization*, IEEE Trans. Autom. Control **61** (2016), 735-747.
- [6] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.