バナッハ空間の skewness と単位球の non-square 性について[*1]

岡山県立大学情報工学部　三　谷　健　一

概　要

バナッハ空間の幾何学的定数の一つである skewness を考察する．この定数は Ritt[7] による generalized inner product の考察に関連し，Fitzpatrick ら [2] によって導入された．この定数を用いてヒルベルト空間やいくつかの幾何学的性質を特徴づけることができる．本研究では，Fitzpatrick らによる skewness による uniformly non-square の特徴づけに関する定理について再考察することを目的とする．

X を $\dim X \geq 2$ なる実バナッハ空間とし，$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とおく．

定義 1（[2]） バナッハ空間 X の skewness $s(X)$ を

$$s(X) = \sup\left\{\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle : x, y \in S_X\right\}$$

と定義する．ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \lim_{t\to+0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \quad (x, y \in X)$$

である．

上で定めた $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は，Ritt[7] によって与えられたバナッハ空間における generalized inner product であり，したがって skewness は generalized inner product の対称性の度合いを表す定数である．

初めに skewness の諸性質を述べる．明らかに，任意のバナッハ空間 X に対し

$$0 \leq s(X) \leq 2.$$

[*1] *Keywords.* uniformly non-square, non-square skewness.
本研究は JSPS 科研費 JP21K03275 の助成を受けたものである．

また，$s(X)$ は norming functional を用いて次のように表すことができる．

定義 2　X をバナッハ空間とし，$x(\neq 0) \in X$ とする．$x^* \in X^*$ が x の norming functional であるとは，$\|x^*\|^* = 1$ かつ $x^*(x) = \|x\|$ をみたすときをいい，x の norming functional 全体を $D(X, x)$ とかく．

補題 1（[2]）　任意のバナッハ空間 X に対し

$$s(X) = \sup \Big\{ x^*(y) - y^*(x) : x, y \in S_X, x^* \in D(X, x),\ y^* \in D(X, y) \Big\}.$$

これを用いて次が示された．

命題 1（[2]）　(i) X がヒルベルト空間であることと $s(X) = 0$ は同値．
(ii) バナッハ空間 X とその双対空間 X^* に対し $s(X^*) = s(X)$.

次に単位球の幾何学的性質の一つである uniformly non-square 性について考える．

定義 3　バナッハ空間 X が uniformly non-square であるとは，ある $\delta > 0$ が存在し，

$$x, y \in S_X \Longrightarrow \min(\|x + y\|, \|x - y\|) \leq 2(1 - \delta)$$

のときを言う．

定理 1（[2]）　X をバナッハ空間とする．このとき X が uniformly non-square であることと $s(X) < 2$ は同値．

この定理は generalized inner product を用いて証明された．ここでは補題 1 を用いた別証明を与える．

(($\Rightarrow$) の別証明)　$s(X) = 2$ とする．補題 1 から，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，ある $x_n, y_n \in S_X, x_n^* \in D(X, x_n), y_n^* \in D(X, y_n)$ があって，

$$x_n^*(y_n) - y_n^*(x_n) > 2 - \frac{1}{n}$$

である．よって

$$2 - \frac{1}{n} < x_n^*(y_n) - y_n^*(x_n) \leq x_n^*(y_n) + 1 \leq 2.$$

$n \to \infty$ とすると

$$x_n^*(y_n) \to 1,\quad y_n^*(x_n) \to -1 \tag{1}$$

が分かる．さらに，$x_n^*(x_n + y_n)$ を考える．(1) より

$$x_n^*(x_n + y_n) = x_n^*(x_n) + x_n^*(y_n) = 1 + x_n^*(y_n) \to 2 \quad (n \to \infty)$$

これと

$$x_n^*(x_n + y_n) \le \|x_n^*\|\|x_n + y_n\| = \|x_n + y_n\| \le 2$$

より

$$\|x_n + y_n\| \to 2 \tag{2}$$

が分かる．同様に，$y_n^*(y_n - y_n)$ を考える．(1) より

$$y_n^*(y_n - x_n) = y_n^*(y_n) - y_n^*(x_n) = 1 - y_n^*(x_n) \to 2 \quad (n \to \infty)$$

これと

$$y_n^*(y_n - x_n) \le \|y_n^*\|\|y_n - x_n\| = \|y_n - x_n\| \le 2$$

より

$$\|y_n - x_n\| \to 2. \tag{3}$$

よって，(2), (3) から X が uniformly non-square でないことが分かる．したがって $(\Rightarrow)$ が示せた．

$(\Leftarrow)$ つまり，$s(X) < 2$ ならば X が uniformly non-square であることは補題 1 を用いて証明することができなかった．その代わりとして uniformly non-square より弱い次の性質を考える．

定義 4　バナッハ空間 X が non-square であるとは,

$$x, y \in S_X \Longrightarrow \min(\|x + y\|, \|x - y\|) < 2$$

のときを言う．

定義から，明らかに uniformly non-square ならば non-square である．補題 1 を用いて次を証明する．

命題 2　X をバナッハ空間とする．このとき $s(X) < 2$ ならば X は non-square である．

(証明) X は non-square でないとする．このとき，ある $x, y \in S_X$ が存在して

$$\|x+y\| = \|x-y\| = 2.$$

ここで

$$z = \frac{x+y}{2} \in S_X, \quad w = \frac{x-y}{2} \in S_X$$

とおき，$z^* \in D(X,z)$, $w^* \in D(X,w)$ をとる．

$$z^*(z) = z^*\left(\frac{x+y}{2}\right) = 1$$

より

$$2 = z^*(x+y) = z^*(x) + z^*(y) \leq 1 + z^*(y) \leq 2.$$

よって $z^*(x) = 1, z^*(y) = 1$．つまり $z^* \in D(X,x) \cap D(X,y)$．同様に，$w^* \in D(X,x) \cap D(X,-y)$ である．よって

$$z^*(x) - w^*(y) = 1 + 1 = 2,\ w^* \in D(X,x),\ z^* \in D(X,y)$$

であり，補題 1 より $s(X) = 2$ である．

定理 1 から，$s(X) < 2$ ならば X は uniformly non-square であり，したがって $s(X) < 2$ ならば X は non-square であるが，上のように直接示すことができる．

次に具体的な空間における skewness の計算を考察する．2 次元の ℓ_∞ 空間を ℓ_∞^2 とおく．ℓ_∞^2 は uniformly non-square でないから定理 1 より $s(\ell_\infty^2) = 2$ である．ここでは補題 1 を改良した次の補題を用いて $s(\ell_\infty^2)$ を直接計算する．

補題 2（[4]）　$X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ とする．このとき，

$$s(X) = \sup\{s(X,x,y) : x, y \in \mathrm{ext}(B_X)\},$$

ここで，

$$s(X,x,y) = \sup\{x^*(y) - y^*(x) : x^* \in D(X,x),\ y^* \in D(X,y)\},$$

$\mathrm{ext}(B_X)$ は B_X の端点全体の集合である．

$X = \ell_\infty^2$ とおく．このとき $\mathrm{ext}(B_X)$ は次のように表すことができる．

$$\mathrm{ext}(B_X) = \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}.$$

初めに，$x = (1,1)$，$y = (1,-1)$ を考える．x の norming functional として $x^* = (1,0)$，y の norming functional として $y^* = (0,-1)$ を選ぶと

$$x^*(y) - y^*(x) = \langle (1,0),(1,-1)\rangle - \langle (0,-1),(1,1)\rangle = 1+1 = 2.$$

よって，補題 2 より $s(X) = 2$.

注意　一般に，

$$s(X) = \sup\{\langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle : x,y \in \mathrm{ext}(B_X)\}, \tag{4}$$

は成立しない．実際，上の例 ($X = \ell^2_\infty$) で考えると，$x = (1,1)$，$y = (1,-1)$ のとき，

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \|x\|_\infty \lim_{t\to+0} \frac{\|x+ty\|_\infty - \|x\|_\infty}{t}\\ &= \lim_{t\to+0} \frac{\|(1+t,1-t)\|_\infty - 1}{t}\\ &= \lim_{t\to+0} \frac{(1+t)-1}{t} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle y,x\rangle &= \|y\|_\infty \lim_{t\to+0} \frac{\|y+tx\|_\infty - \|y\|_\infty}{t}\\ &= \lim_{t\to+0} \frac{\|(1+t,-1+t)\|_\infty - 1}{t}\\ &= \lim_{t\to+0} \frac{(1+t)-1}{t} = 1\end{aligned}$$

より

$$\langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle = 0.$$

その他の $\mathrm{ext}(B_X)$ の元 x,y においても $\langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle = 0$．よって，(4) の右辺は 0 である．左辺は $s(X) = 2$ であったから (4) は成立しない．

その他の skewness に関する研究については [1, 3, 5, 6] を参照のこと．

参考文献

[1] M. Baronti and P.L. Papini, “Projections, skewness and related constants in real normed spaces,” *Math. Pannonica,* **3** (1992), 31–47.
[2] S. Fitzpatrick and B. Reznick, “Skewness in Banach spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275** (1983), 587–597.
[3] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, “A note on relations between skewness and geometrical constants of Banach spaces,” *Linear Nonlinear Anal.*, **7** (2021), 257–264.

[4] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and N. Komuro, "Extremal structure of absolute norms and the skewness," *Linear Nonlinear Anal.*, **1** (2015), 159–167.
[5] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and N. Komuro, "Skewness of Day-James spaces," *Ann. Funct. Anal.*, **13** (2022), Article number:75.
[6] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and Y. Takahashi, "Skewness and James constant of Banach spaces," *J. Nonlinear Convex Anal.*, **14** (2013), 115–122.
[7] R.K. Ritt, "A generalization of inner product," *Michigan Math. J.*, **3** (1955), 23–26.