非増加関数に対する重み付き Hardy の不等式について

Weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions

森　藤　紳　哉*

Abstract

本稿の主目的は，非増加関数に対する重み付き Hardy の不等式，特にその limiting case を述べ，今後の課題を述べることである．

I.　はじめに

本稿では，重み付き Hardy の不等式に関して進行中の著者たちによる研究を紹介したい．第 2 節では，主定理と関連する今後の課題を述べる．第 3，4 節では，Lorentz 空間上での最大作用素の有界性を考える．第 5 節では，重み付き Hardy の不等式の弱型を考えることによって，重み関数に対する様々な条件を与える．第 6 節では，本研究に至った経緯や謝辞を述べる．

文献に関して一言しておく．直接的なものは 1990 年の Ariño-Muckenhoupt [2] であるが，1972 年の Muckenhoupt [4] や 1982 年の Andersen-Muckenhoupt [1] がさらにより基本的な結果を含んだものであると言うことができる．

II.　Ariño-Muckenhoupt class と主定理

先ず，Ariño-Muckenhoupt class AM_∞ を全ての AM_q, $1 \le q < \infty$, の和集合とする．ここで AM_q はある定数 B が存在し， 以下の不等式が任意の $r > 0$ に対して成り立つような $[0, \infty)$ 上の非負値関数 W の集合である．

$$\int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^q W(x)\,dx \le B \int_0^r W(x)\,dx.$$

---

* 奈良女子大学研究院自然科学系数学領域, moritoh@cc.nara-wu.ac.jp
本稿は，近藤恵夢（奈良女子大学大学院博士後期課程 2 年）と進行中の共同研究に基づき，
松岡勝男教授が 2023 年 3 月に日本大学経済学部を退職されたことを祝して寄稿するものである．

各 $1 \leq q < \infty$ に対する AM_q は Ariño-Muckenhoupt [2] によって考えられた重み関数の集合である．本稿で考える Hardy の不等式の limiting case は以下のように述べられる．

主定理．　$0 < p < \infty$ とする．ある正の数 q に対して $\int_r^\infty x^{-q}\, W(x)\, dx < \infty$ が任意の $r > 0$ に対して成り立つとする．このとき，ある定数 C が存在し，$[0, \infty)$ 上の任意の正値非増加関数 f に対して次の不等式が成り立つためには，W が AM_∞ に属することが必要十分である．

$$\int_0^\infty \left(\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log\, f(t)\, dt\right)\right)^p W(x)\, dx \leq C \int_0^\infty f(x)^p\, W(x)\, dx.$$

相加平均と相乗平均の関係としてよく知られていることだが，

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)^{1/q}\, dt\right)^q = \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log\, f(t)\, dt\right)$$

に注意しておく．さらに文献 [2] より，重み付き Hardy の不等式

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)^{1/q}\, dt\right)^q W(x)\, dx \leq C \int_0^\infty f(x)\, W(x)\, dx$$

が任意の非負値非増加関数 f に対して成り立つためには，W が AM_q に属することが必要十分である．従って，この主定理は自然なものであると言うことが出来る．

今後の課題 1．　Bennett–Grosse-Erdmann [3] と Persson-Stepanov [5] を融合して，主定理を一般化する以下の問題を考えたい．

$0 < p,\, q < \infty$ とする．ある定数 C が存在し，

$$\left[\int_0^\infty \left(\exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \log\, f(t)\, dt\Big)\right)^q W(x)\, dx\right]^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty f(x)^p\, V(x)\, dx\right)^{1/p}$$

が任意の正値非増加関数 f に対して成り立つために必要十分な V, W に関する条件は何か．

なお，主定理は準備中の論文に証明付きで述べられる予定である．文献 [2] の中の，基本的ではあるが証明の難しい reverse Hölder 型の不等式が我々の論文では不要になり，簡易化が行われることを付記しておく．

III．最大作用素と Lorentz 空間

古典的 Lorentz 空間上での Hardy-Littlewood の最大作用素の有界性と前節の考察との関連性を文献 [2] に基づいて述べる．

定義 1．　$1 \leq q < \infty$ とする．$W(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の非負値関数とする．このとき，古典的 Lorentz 空間 $\Lambda_q(W)$ は以下の条件をみたす $\mathbb{R}^n$ 上の関数 g の集合として定義される．

$$\|g\|_{\Lambda_q(W)} := \left[\int_0^\infty (g^*(x))^q W(x) dx\right]^{1/q} < \infty.$$

ここで

$$g^*(x) := \inf \{y \geq 0 \mid \mu(\{t \in \mathbb{R}^n \mid |g(t)| > y\}) \leq x\}$$

は関数 g の非増加再配列であり，μ は Lebesgue 測度である．

定義 2． $\mathbb{R}^n$ 上の関数 g に対して，Hardy-Littlewood の最大作用素 M は

$$Mg(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |g(y)| dy$$

によって定義される．ここで上限は，x を含むあらゆる cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ にわたって取られている．

以下の (1) と (2) は同値である．その証明を文献 [2] に従って次節で述べる．なお，前節でも触れたように，これらは $W \in AM_q$ とも同値である．

(1) Hardy-Littlewood の最大作用素 M は古典的 Lorentz 空間 $\Lambda_q(W)$ 上で有界である．

(2) Hardy の不等式

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^q W(x)\, dx \leq C \int_0^\infty f(x)^q\, W(x)\, dx$$

が $[0, \infty)$ 上の任意の非負値非増加関数 f に対して成り立つ．

今後の課題 2． Hardy-Littlewood の最大作用素 M の古典的 Lorentz 空間 $\Lambda_q(W)$ 上での有界性の limiting case（$q \to \infty$）に対応する事柄を考えたい．

IV． (1) と (2) の同値性の証明

(1) $\Rightarrow$ (2)： $[0, \infty)$ 上の非負値非増加関数 f に対して，$\mathbb{R}^n$ 上の関数 g を $g(x) = f(A|x|^n)$ によって定める．ここで，A は $\mathbb{R}^n$ の単位球の体積を表す．中心 x，辺長 $4|x|$ の立方体 Q をとると，最大作用素 M の定義より

$$Mg(x) \geq \frac{1}{(4|x|)^n} \int_{|y| \leq |x|} g(y) dy$$

が従う．極座標表示により

$$Mg(x) \geq \frac{nA}{(4|x|)^n} \int_0^{|x|} f(At^n) t^{n-1} dt$$

となり，変数変換を行って

$$Mg(x) \geq (4^{-n} A)(A|x|^n)^{-1} \int_0^{A|x|^n} f(s) ds$$

となる．右辺は x に関して radial な非増加関数であるから

$$(Mg)^*(t) \geq (4^{-n}A)\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds$$

となる．両辺を q 乗し，関数 W を掛けて積分し，$g^*(t)=f(t)$ を用いて，非増加関数 f に対する Hardy の不等式が得られる．

(2) ⇒ (1)：$g \in \Lambda_q(W)$ に対して非増加再配列 g^* を考え，Hardy の不等式を適用して

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x g^*(t)dt\right)^q W(x)\,dx \leq C\int_0^\infty g^*(x)^q\,W(x)\,dx$$

が得られる．最大作用素と再配列に関する次の不等式

$$(Mg)^*(x) \leq (C/x)\int_0^x g^*(t)dt$$

を適用して，最大作用素 M が古典的 Lorentz 空間 $\Lambda_q(W)$ 上で有界であることが言える．

V．Hardy の不等式の弱型

$[0,\infty)$ 上の任意の非負値関数 f に対して Hardy の不等式

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^q V(x)\,dx \leq C\int_0^\infty f(x)^q\,W(x)\,dx$$

が成り立つためには重み関数 V, W が

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty \frac{V(x)}{x^q}dx\right)\left(\int_0^r W(x)^{-1/(q-1)}dx\right)^{q-1} < \infty$$

をみたすことが必要十分である．これは 1972 年の Muckenhoupt の結果 [4] である．1982 年に Andersen と Muckenhoupt によって得られた Hardy の不等式の弱型に関する結果 [1] を用いて，文献 [2] では以下の補助定理が述べられている．

補助定理． $1 \leq q < \infty$ とし，V, W を非負値関数とする．このときある定数 C が存在し，任意の非負値関数 f と任意の $\lambda > 0$ に対して弱型の Hardy の不等式

$$\int_{\{x\in[0,\infty)\,|\,(1/x)\int_0^x f(t)dt>\lambda\}} V(x)dx \leq (C/\lambda^q)\int_0^\infty f(x)^q W(x)dx$$

が成り立つためには，ある定数 B が存在し，任意の $0<r<s$ に対して

$$\left(\frac{1}{s^q}\int_r^s V(x)dx\right)\left(\int_0^r W(x)^{-1/(q-1)}dx\right)^{q-1} \leq B$$

が成り立つことが必要十分である．

この補助定理を用いて，文献 [2] では，集合 AM_q に属する重み関数 W の条件が次のように強められている．すなわち，ある定数 B が存在し，任意の $r>0$ に対して

$$\left(\frac{1}{r^q}\int_0^r W(x)dx\right)\left(\int_0^r W(x)^{-1/(q-1)}dx\right)^{q-1} \le B$$

が成り立つ，という条件である．逆に，重み関数 W が非減少であるときは，W がこの条件を満たすならば W は集合 AM_q に属することも示されている．

VI．最後に

2023 年 2 月に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会では，1 つ目の課題までが述べられたが，2 つ目の課題はその後の質疑応答などから得られたものである．松岡勝男先生はこれまで調和解析学や関数空間論をテーマに持つ研究集会を数多く開催してこられた．そのような場でのやり取りから生まれた数学上の問題意識も数多い．先生には今後も解析学のグループを牽引する存在であり続けて頂ければ本当に有難いことに思う．

References

[1] Andersen, K.F. and B. Muckenhoupt. Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions, *Studia Math. 72*, 1982, pp. 9–26.

[2] Ariño, M. and B. Muckenhoupt. Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions, *Trans. Amer. Math. Soc. 320*, 1990, pp. 727–735.

[3] Bennett, G. and K.-G. Grosse-Erdmann. Weighted Hardy inequalities for decreasing sequences and functions, *Math. Ann. 334*, 2006, pp. 489–531.

[4] Muckenhoupt, B. Hardy's inequality with weights, *Studia Math. 44*, 1972, pp. 31–38.

[5] Persson, L.-E. and V.D. Stepanov. Weighted integral inequalities with the geometric mean operator, *J. Inequal. Appl. 7*, 2002, pp. 727–746.