

査読論文

Realized Volatility とボラティリティ指数に基づく 高ボラティリティ・イベントの自己励起的集積性： マーク付き一変量 Hawkes 過程による日米市場比較

戸 塚 英 臣

概 要

本稿は、日経平均株価および S&P 500 の実現ボラティリティ (Realized Volatility; 以下, RV という), 日経平均ボラティリティ・インデックス (以下, 日経平均 VI という), ならびに CBOE Volatility Index (以下, CBOE VIX という) を対象に, 高ボラティリティ・イベントが時間的に集中して発生する構造をマーク付き一変量 Hawkes 過程により分析した. 各系列について共通営業日標本内の上位順位に基づき高ボラティリティ・イベントを抽出し, 境界値との差として定義される非負の水準超過幅をマークとして導入した. 指数関数, 指数関数の和, パワーロー指数減衰, QEXP, ガンマ分布, Weibull 型の 6 種類のカーネルを比較した結果, 比較対象としたカーネル関数の範囲では, 多くの系列・閾値でガンマ分布または Weibull 型の山型カーネルが情報量規準上, 相対的に良好な適合を示した. この結果は, 高ボラティリティ・イベントの影響が直後に単調減衰するだけでなく, 一定の遅れを伴って強まる構造を含む可能性を示唆するものである. ただし, 多くのモデルで時間変換残差の K-S 検定は棄却されており, 本稿の結果は比較対象内での相対的適合として慎重に解釈されるべきである.

キーワード: Realized Volatility; ボラティリティ指数; 高ボラティリティ・イベント; マーク付き Hawkes 過程; カーネル関数

I はじめに

1 研究の背景

金融市場におけるボラティリティは, 資産価格変動の大きさを表す基本的なリスク指標であり, リスク管理, 資産価格評価, ポートフォリオ管理, 市場安定性の分析において重要な役割を果たす. 金融時系列では, 大きな価格変動が一度発生するとその後も大きな変動が続きやすいというボラティリティ・クラスタリングが古くから知られている. Mandelbrot (1963) は投機価格の変動が正規分布的な単純な変動では説明しにくいことを指摘し, その後, Engle (1982) の ARCH モデル, Bollerslev (1986)

* 日本大学経済学部 e-mail: totsuka.hideomi@nihon-u.ac.jp

の GARCH モデルをはじめとして、条件付き分散の時間変化を明示的に扱うモデルが発展してきた。これらの研究は、ボラティリティが時間を通じて変化し、過去のショックや過去の分散に依存して持続するという金融時系列の特徴を捉えるための基礎を与えた。

一方で、高頻度データの利用が進むにつれて、日中リターンから日次の変動性を直接測定する実現ボラティリティ (Realized Volatility; 以下「RV」という) に基づく分析も重要になっている。RV は、高頻度リターンの二乗和に基づいて構成される変動尺度であり、日次あるいはそれより低頻度のボラティリティを測定・予測するための有用な指標として用いられてきた (Barndorff-Nielsen and Shephard, 2002; Andersen et al., 2003)。また、Oxford-Man Institute の Realized Library は、各国市場の RV 指標を利用するための代表的なデータ源の一つである (Heber et al., 2009)。ボラティリティを捉える指標としては、事後的に観測される RV だけでなく、オプション価格から抽出されるインプライド・ボラティリティ指数も重要である。本稿では、日経平均ボラティリティ・インデックスを「日経平均 VI」、CBOE Volatility Index を「CBOE VIX」と表記し、両者を総称する場合には「VI/VIX」と表記する。CBOE VIX は、S&P 500 指数オプション価格に基づいて、市場が予想するおおむね 30 日先の変動性を表す指標として広く用いられている (Whaley, 2000; CBOE, 2026)。

本稿の関心は、ボラティリティ系列そのものの水準を予測することではなく、高ボラティリティ局面が時間的にどのように発生・集積するかを捉えることにある。そこで、日経平均株価および S&P 500 の RV、日経平均 VI、CBOE VIX を対象に、各系列の上位一定割合に入る観測値を高ボラティリティ・イベントとして定義する。すなわち、対象となるボラティリティ系列 X_t について、系列内の上位順位に基づいて抽出された日をイベント時点とみなし、連続値のボラティリティ系列をイベント時系列として捉え直す。この視点に立つと、ボラティリティ・クラスタリングは、高ボラティリティ・イベントが時間的に独立に発生するのではなく、過去のイベント後に集中して発生しやすいという自己励起的な集積として解釈できる。

さらに、高ボラティリティ・イベントでは、イベントが発生したかどうかだけでなく、そのイベントがどの程度大きかったかも重要である。境界値との差が小さいイベントと、境界値との差が大きいイベントでは、その後の市場不安定性に与える影響が異なる可能性がある。このため、本稿では、イベント時点のボラティリティ水準と境界値との差を非負の水準超過幅として定義し、これをマークとしてモデルに導入する。標本内順位により上位観測値を抽出し、その境界値との差を扱う本稿の考え方は、極値理論や金融リスク管理における Peak-over-threshold 型の分析とも関係しており、一般化パレート分布はその代表的な枠組みである (Embrechts et al., 1997; McNeil and Frey, 2000)。本稿では、この考え方を、高ボラティリティ・イベントの発生時点と規模の分析に応用する。

2 本稿の方法・目的・貢献

高ボラティリティ・イベントの発生時点を分析するためには、イベントがいつ発生したかを直接扱う点過程モデルが有用である。点過程は、時間軸上に発生する事象の時点を確率的に記述する枠組みであり、過去の発生履歴が将来の発生確率に与える影響を扱うことができる (Daley and Vere-Jones, 2003)。特に、Hawkes 過程は、過去のイベントが将来のイベント発生強度を高める自己励起型の点過程である (Hawkes, 1971; Hawkes and Oakes, 1974)。自己励起型点過程は地震の余震発生分析でも用いられており、Ogata (1988) は発生時点とマグニチュードを扱う点過程モデルおよび残差診断の枠組みを提示した。金融分野でも、Hawkes 過程は高頻度取引、注文到着、価格ジャンプ、市場間のショッ

ク伝播や金融コンテイジョンなどの分析に応用されてきた (Bacry et al., 2015; Aït-Sahalia et al., 2015).

本稿では、高ボラティリティ・イベントの発生時刻と規模を同時に扱うため、マーク付き一変量 Hawkes 過程を用いる。通常の Hawkes 過程では各イベントは発生時刻のみによって特徴づけられるが、本稿では境界値との差として定義される水準超過幅をマークとして導入し、大きなイベントほどその後のイベント発生強度により大きな影響を与える可能性を考慮する。また、過去のイベントの影響が時間とともにどのように減衰するかを表すカーネル関数として、指数関数、指数関数の和、パワーロー指数減衰関数、QEXP 関数、ガンマ分布カーネル、Weibull 型カーネルを比較する。指数関数カーネルは基準的な単調減衰型のカーネルであり、指数関数の和は複数の時間スケールを表す。パワーロー指数減衰関数と QEXP 関数は、指数関数よりも長く残る影響を表現する候補である。なお、QEXP 関数は Tsallis 型の q 指数関数に基づくものであり、 $q \rightarrow 1$ の極限で通常の指数関数に近づく (Tsallis, 1988)。ガンマ分布カーネルと Weibull 型カーネルは、イベント発生後に一定の遅れを伴って影響が最大となる山型の減衰構造を表現できる。

本稿の目的は、実現ボラティリティおよびボラティリティ指数に基づく高ボラティリティ・イベントの発生時刻構造が、マーク付き一変量 Hawkes 過程によってどの程度記述できるかを検討することである。具体的には、日経平均株価 RV, S&P 500 RV, 日経平均 VI, CBOE VIX を対象に、高ボラティリティ・イベントの時間的集積性が自己励起型点過程と整合的であるかを分析する。さらに、複数のカーネル関数を比較することで、イベント発生後の影響が即時に減衰するのか、一定の遅れを伴って現れるのか、あるいはより長く持続するのかを検討する。

本稿では、次の四つの問いを設定する。第一に、RV に基づく高ボラティリティ・イベントが自己励起型モデルと整合的な時間的集積性を示すか。第二に、VI/VIX に基づく高ボラティリティ・イベントについても同様の集積性が推定されるか。第三に、RV と VI/VIX の間で適合するカーネル関数や減衰構造に違いがあるか。第四に、日本市場と米国市場の間で経験的分岐比、減衰速度、マーク効果にどのような違いがあるか、である。本稿の貢献は、実現ボラティリティと期待ボラティリティの双方を高閾値イベントとして点過程化し、同一のマーク付き Hawkes 過程の枠組みで比較する点、複数のカーネル関数を比較して高ボラティリティ・イベント後の自己励起効果の減衰構造を評価する点、さらにイベント規模をマークとして導入し、標準化されたイベント規模が将来のイベント発生強度に与える影響を分析する点にある。

ただし、本稿で推定される自己励起効果は、採用したモデルのもとで過去のイベントが将来のイベント発生強度とどのように関連するかを表すものであり、市場における因果的な誘発効果を直接識別するものではない。特に、本稿ではベースライン強度を一定とする一変量 Hawkes 過程を用いているため、共通ショック、市場局面の変化、時変的な不安定性と自己励起効果を完全に分離することはできない。また、高ボラティリティ・イベントは標本内順位と境界値に基づいて定義されるため、上位比率および境界値の設定が結果に影響しうる。さらに、一変量 Hawkes 過程を用いるため、日本市場と米国市場の相互作用や、RV と VI/VIX の間の相互励起性を直接モデル化するものではない。これらの限界を踏まえ、本稿では複数の上位比率と複数のカーネル関数を比較し、結果の頑健性と解釈可能性を検討する。

3 本稿の構成

本稿の構成は次のとおりである。第 II 節では、本稿で用いる一変量 Hawkes 過程およびマーク付き一変量 Hawkes 過程を説明し、条件付き強度関数、完全対数尤度、マーク分布、カーネル関数、分岐

比の解釈を整理する。第 III 節では、最尤推定、情報量規準、信頼区間、時間変換残差による診断を述べる。第 IV 節では、使用データ、RV の計算、高ボラティリティ・イベントの定義、閾値およびマークの設定を説明する。第 V 節では、日経平均株価 RV、S&P 500 RV、日経平均 VI、CBOE VIX の各系列について、複数のカーネル関数を比較した実証結果を示す。第 VI 節では、RV と VI/VIX の違い、日本市場と米国市場の違い、カーネル形状とマーク効果の解釈、および結果解釈上の留意点について考察する。最後に第 VII 節では、本稿の結果を要約し、今後の課題を述べる。

II 一変量 Hawkes 過程について

本節では、本稿で用いるマーク付き一変量 Hawkes 過程を定式化するために必要な点過程の記法を整理する。まず、点過程、計数過程、条件付き強度を導入し、ポアソン過程と一般の点過程尤度を確認する。そのうえで、一変量 Hawkes 過程およびマーク付き一変量 Hawkes 過程を定義し、本稿で用いる完全対数尤度、マーク分布、カーネル関数、分岐比、減衰指標を整理する (Daley and Vere-Jones, 2003, 2008; Hawkes, 1971; Hawkes and Oakes, 1974; Ogata, 1988)。

1 点過程・計数過程・条件付き強度

点過程とは、時間軸上に発生する事象の時点を確認的に記述する枠組みである (Daley and Vere-Jones, 2003, 2008)。本稿では、高ボラティリティ状態が発生した日を事象とみなし、その発生時刻の列を点過程として扱う。観測期間を $[0, T]$ とし、この期間に n 個の事象が発生したとする。事象時刻を

$$t_n = (t_1, \dots, t_n)$$

と表し、

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T \quad (1)$$

を満たすものとする。時刻 t までの事象数は

$$N(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{t_i \leq t\}}$$

で表される。この $N(t)$ は計数過程であり、事象が発生するたびに 1 ずつ増加する右連続の階段関数である。

点過程の発生構造は、条件付き強度関数によって記述されることが多い。時刻 t の直前までの履歴を

$$\mathcal{H}_t = \{t_i : t_i < t\}$$

とする。条件付き強度 $\lambda(t | \mathcal{H}_t)$ は、履歴 $\mathcal{H}_t$ が与えられたもとで、時刻 t 近傍に事象が発生する瞬間的な発生率である。すなわち、微小時間 Δ に対して

$$P[N(t + \Delta) - N(t) = 1 | \mathcal{H}_t] = \lambda(t | \mathcal{H}_t)\Delta + o(\Delta) \quad (2)$$

が成り立つ。この定義により、事象発生が履歴に依存しない場合だけでなく、過去の事象が将来の発生率を変化させる場合も統一的に扱うことができる。

2 ポアソン過程と一般の点過程尤度

ポアソン過程は、事象が過去の履歴に依存せずに発生する基準的な点過程である (Daley and Vere-Jones, 2003). 強度が一定の定常ポアソン過程では、区間長 s における事象数は

$$N(t+s) - N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda s)$$

に従う. したがって、定常ポアソン過程では、事象の発生率は時間を通じて一定であり、過去の発生履歴からの影響は存在しない. 強度が時刻に依存する非定常ポアソン過程では、強度を決定論的関数 $\lambda(t)$ として扱う. このとき、観測期間 $[0, T]$ における発生時刻列 t_n の尤度は

$$p_{[0,T]}(\mathbf{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \exp \left\{ - \int_0^T \lambda(u) du \right\}$$

で与えられる. この式は、実際に事象が発生した時刻での強度の積と、観測期間全体の累積強度による補正項から構成される.

一般の点過程では、強度が過去の履歴に依存することを許す. この場合、非定常ポアソン過程の強度 $\lambda(t)$ を条件付き強度 $\lambda(t | \mathcal{H}_t)$ に置き換えることで、観測された発生時刻列の尤度は

$$p_{[0,T]}(\mathbf{t}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i | \mathcal{H}_{t_i-}) \exp \left\{ - \int_0^T \lambda(u | \mathcal{H}_u) du \right\}$$

と表される (Daley and Vere-Jones, 2003; Ogata, 1988). ここで、 $\mathcal{H}_{t_i-}$ は時刻 t_i の直前までの履歴であり、事象 t_i 自身を含まない. 対数尤度は

$$\ell = \sum_{i=1}^n \log \lambda(t_i | \mathcal{H}_{t_i-}) - \int_0^T \lambda(u | \mathcal{H}_u) du$$

である. この一般形が、以下で扱う Hawkes 過程の尤度の基礎となる.

3 一変量 Hawkes 過程

一変量 Hawkes 過程は、過去の事象がその後の事象発生強度を高める自己励起型の点過程である (Hawkes, 1971; Hawkes and Oakes, 1974). 最も基本的な一変量 Hawkes 過程では、条件付き強度を

$$\lambda(t | \mathcal{H}_t) = \mu + \sum_{t_i < t} g(t - t_i)$$

と定義する. ここで、 $\mu \geq 0$ はベースライン強度であり、過去の事象に依存しない基礎的な発生率を表す. $g(\cdot)$ はカーネル関数であり、時刻 t_i に発生した事象が、その後の時刻 $t > t_i$ における発生強度をどの程度押し上げるかを表す. 因果性を反映するため、通常は $g(u) = 0$ ($u \leq 0$), $g(u) \geq 0$ ($u > 0$) と仮定する.

この定式化では、ある事象が発生すると、その後の条件付き強度が一時的に上昇し、その影響はカー

ネル関数 $g(u)$ の形状に従って時間とともに減衰する．したがって，Hawkes 過程は，地震の余震，神経発火，金融市場における注文到着や価格ジャンプなど，事象が時間的に集中的に発生する現象を表すために用いられる (Ogata, 1988; Bacry et al., 2015)．本稿では，高ボラティリティ・イベントが過去のイベント後に集中して発生しやすいかを分析するため，この自己励起性を利用する．

パラメータを $\theta = (\mu, \vartheta)$ とし， ϑ をカーネル関数 g_ϑ のパラメータとする．観測された発生時刻列 $t_n = (t_1, \dots, t_n)$ に対する対数尤度は

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ \mu + \sum_{j<i} g_\vartheta(t_i - t_j) \right\} - \mu T - \sum_{j=1}^n \int_{t_j}^T g_\vartheta(u - t_j) du$$

と書ける．この式の第1項は実際にイベントが観測された時点の強度を評価し，第2項と第3項は観測期間全体の累積強度を補正する．マークを伴う場合の対数尤度は次節で定式化する．

4 マーク付き一変量 Hawkes 過程

通常の一変量 Hawkes 過程では，各事象は発生時刻のみによって特徴づけられる．しかし，本稿で扱う高ボラティリティ・イベントでは，事象が発生したかどうかだけでなく，境界値との差として測られるイベント規模も重要である．このような事象に付随する大きさや属性をマークと呼ぶ (Daley and Vere-Jones, 2008; Ogata, 1988)．観測された事象を

$$(t_i, m_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

と表す．ここで， t_i は事象時刻， m_i はマークである．ボラティリティ指標 X_t について，標本内順位または境界値により抽出された時点をイベントとし，その境界値との差をマークとする場合には，

$$m_i = X_{t_i} - u_X \quad (4)$$

と定義できる．この定義では， m_i は高ボラティリティ・イベントにおけるボラティリティ水準と境界値との差を表す非負の量である．

本稿では，マーク分布の推定には非負の水準超過幅 m_i を用いる．一方，Hawkes 過程の励起効果に入るマーク変数には，数値的安定性と尺度調整のため，

$$z_i = \frac{m_i - \bar{m}}{s_m} \quad (5)$$

により標準化したマークを用いる．時刻 t 直前までの履歴を

$$\mathcal{H}_t = \{(t_i, m_i) : t_i < t\}$$

とする．本稿の実装では，各カーネルを必ずしも正規化された密度関数として扱わない．そこで，マーク付き一変量 Hawkes 過程の条件付き強度を

$$\lambda(t \mid \mathcal{H}_t; \theta_H) = \mu + \sum_{t_i < t} \exp(\gamma z_i) \phi_\psi(t - t_i; \vartheta) \quad (6)$$

と書く. ここで, $\mu > 0$ はベースライン強度, $\phi_\psi(u; \vartheta)$ は各カーネルに対応する実装上の励起カーネル, ϑ はカーネル関数のパラメータである. また, $\exp(\gamma z_i)$ は標準化マークが自己励起効果に与える影響を表す. $\gamma > 0$ であれば, 大きなマークを持つイベントほど, その後のイベント発生強度をより強く押し上げることを意味する.

点過程の尤度は, 実際にイベントが発生した時刻における条件付き強度と, 観測期間全体における累積強度によって構成される (Daley and Vere-Jones, 2003; Ogata, 1988). 式 (6) に基づくイベント時刻部分の対数尤度は

$$\ell_{\text{time}}(\theta_H) = \sum_{i=1}^n \log \lambda(t_i | \mathcal{H}_{t_i-}; \theta_H) - \int_0^T \lambda(t | \mathcal{H}_t; \theta_H) dt$$

である. ここで,

$$\Phi_\psi(x; \vartheta) = \int_0^x \phi_\psi(u; \vartheta) du$$

を実装上の励起カーネルの累積関数とすれば, 累積強度は

$$\int_0^T \lambda(t | \mathcal{H}_t; \theta_H) dt = \mu T + \sum_{i=1}^n \exp(\gamma z_i) \Phi_\psi(T - t_i; \vartheta)$$

と書ける. したがって, イベント時刻部分の対数尤度は

$$\ell_{\text{time}}(\theta_H) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ \mu + \sum_{t_j < t_i} \exp(\gamma z_j) \phi_\psi(t_i - t_j; \vartheta) \right\} - \mu T - \sum_{i=1}^n \exp(\gamma z_i) \Phi_\psi(T - t_i; \vartheta)$$

となる.

マーク付き点過程の完全な尤度を考える場合には, イベント時刻の尤度だけでなく, マークの密度も含める必要がある (Daley and Vere-Jones, 2008). 一般には, マーク密度を $f_M(m_i | t_i, \mathcal{H}_{t_i-})$ として履歴依存的に定式化することもできる. ただし, 本稿の実装では, マーク分布そのものは履歴に依存しない GPD 密度 $f_M(m_i; \xi, \sigma)$ として扱う. 一方, マークが将来のイベント発生強度に与える影響は, Hawkes 強度内の $\exp(\gamma z_i)$ によって表現する. したがって, 完全対数尤度は

$$\ell_{\text{full}}(\theta) = \ell_{\text{time}}(\theta_H) + \ell_{\text{mark}}(\theta_M) \quad (7)$$

であり,

$$\ell_{\text{mark}}(\theta_M) = \sum_{i=1}^n \log f_M(m_i; \theta_M)$$

である. ここで, $\theta = (\theta_H, \theta_M)$ は Hawkes 過程のパラメータとマーク分布のパラメータを合わせた全パラメータである.

本稿では, 水準超過幅を扱うため, マーク分布として一般化パレート分布を用いる (Pickands, 1975; Embrechts et al., 1997; McNeil and Frey, 2000). 形状パラメータを ξ , 尺度パラメータを

$\sigma > 0$ とすると, $\xi \neq 0$ の場合の密度関数は

$$f_M(m; \xi, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{m}{\sigma}\right)^{-1/\xi-1}$$

である. ただし, 定義域は

$$m \geq 0, \quad 1 + \xi \frac{m}{\sigma} > 0$$

を満たす範囲である. $\xi = 0$ の極限では,

$$f_M(m; 0, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{m}{\sigma}\right)$$

に一致する. したがって, $\xi \neq 0$ の場合のマーク部分の対数尤度は

$$\ell_{\text{mark}}(\xi, \sigma) = -n \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \xi \frac{m_i}{\sigma}\right)$$

であり, $\xi = 0$ の場合には

$$\ell_{\text{mark}}(0, \sigma) = -n \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n m_i$$

となる. ξ はマーク分布の裾の厚さを表し, $\xi > 0$ では裾が厚く, $\xi = 0$ では指数分布型の裾を持ち, $\xi < 0$ では分布の上端が有限となる.

本稿では, カーネル関数の違いによるイベント時刻構造の説明力を比較するため, 完全対数尤度 ℓ_{full} に加えて, Hawkes 過程に対応する時刻部分対数尤度 ℓ_{time} も併せて報告する. 完全対数尤度はイベント時刻の当てはまりとマーク分布の当てはまりを同時に評価する指標である. 一方, 時刻部分対数尤度はカーネル関数の違いが直接反映される部分である. なお, 同一データ・同一閾値のもとでカーネル関数のみを変更する場合, マーク部分の尤度は原則としてカーネル関数に依存しない. したがって, 完全対数尤度, 時刻部分対数尤度, AIC, BIC を併用することで, マーク分布の当てはまりとイベント時刻構造の当てはまりを区別して評価する.

5 カーネル関数

Hawkes 過程におけるカーネル関数は, 過去に発生した事象の影響が時間とともにどのように減衰するかを表す (Hawkes, 1971; Bacry et al., 2015). 理論的には, カーネル関数を

$$\phi(u) = \eta k(u), \quad u > 0,$$

と分解し, $k(u)$ を $\int_0^\infty k(u) du = 1$ を満たす正規化カーネル, η を自己励起効果の総量として扱うことができる. ただし, 本稿の実装では, すべてのカーネルを正規化密度としては扱わない. そのため, 以下では実装上用いる励起カーネルを $\phi_\psi(u)$ と書き, 各カーネルの形状と総質量を整理する.

(1) 指数関数カーネル

指数関数カーネルは、最も基本的な単調減衰型カーネルである。本稿の実装では

$$\phi_{\text{EXP}}(u) = \alpha e^{-\beta u}, \quad u > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta > 0$$

とする。カーネル総質量は

$$\int_0^{\infty} \phi_{\text{EXP}}(u) du = \frac{\alpha}{\beta}$$

である。指数関数カーネルでは、イベント直後に励起効果が最大となり、その後は減衰率 β に従って単調に減衰する。

(2) 指数関数の和カーネル

指数関数の和カーネルは、複数の指数減衰を組み合わせることで、短期反応と長期持続性を同時に表す候補である。本稿では 2 成分のカーネル

$$\phi_{\text{SEXP}}(u) = \alpha_1 e^{-\beta_1 u} + \alpha_2 e^{-\beta_2 u}, \quad u > 0$$

を用いる。その総質量は

$$\int_0^{\infty} \phi_{\text{SEXP}}(u) du = \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

である。ただし、パラメータ数が増えるため、推定の不安定性や成分間の識別性には注意を要する。

(3) パワーロー指数減衰カーネル

パワーロー指数減衰カーネルは、べき型の緩やかな減衰と指数的なカットオフを組み合わせたカーネルである。本稿では

$$\phi_{\text{PLE}}(u) = \alpha \frac{e^{-\beta u}}{(u+c)^p}, \quad u > 0$$

とする。その総質量は

$$\int_0^{\infty} \phi_{\text{PLE}}(u) du = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\beta u} (u+c)^{-p} du$$

である。このカーネルは厚い裾を許容するが、推定上はパラメータの値によって指数関数カーネルに近い形へ縮退することがある。

(4) QEXP カーネル

QEXP カーネルは、Tsallis 型の q 指数関数に基づくカーネルであり、通常の指数関数よりも厚い裾を表現する候補である (Tsallis, 1988)。本稿では

$$\phi_{\text{QEXP}}(u) = \alpha \{1 + (q-1)\beta u\}^{-1/(q-1)}, \quad u > 0, \quad 1 < q < 2$$

とする。総質量は

$$\int_0^\infty \phi_{\text{QEXP}}(u) du = \frac{\alpha}{\beta(2-q)}$$

である。 $q \rightarrow 1$ の極限では指数関数カーネルに近づき、 $q > 1$ では指数関数より裾が厚くなる。

(5) ガンマ分布カーネル

ガンマ分布カーネルは、イベント発生直後ではなく、正の時間遅れを伴って励起効果が最大となる山型カーネルである。本稿では

$$\phi_{\text{GAM}}(u) = \alpha \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-\beta u}, \quad u > 0, \quad a > 0, \quad \beta > 0$$

とする。正規化されたガンマ密度を用いているため、総質量は α である。 $a = 1$ の場合は指数関数カーネルに一致し、 $a > 1$ の場合は

$$u_{\text{mode}} = \frac{a-1}{\beta}$$

にピークを持つ。したがって、ガンマ分布カーネルは、ショックの影響が一定の遅れを伴って強まる場合を表現できる。

(6) Weibull 型カーネル

Weibull 型カーネルは、初期の立ち上がりとその後の減衰を柔軟に表す山型カーネルである。本稿では

$$\phi_{\text{WEI}}(u) = \alpha u^{\kappa-1} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\kappa} u^\kappa \right\}, \quad u > 0, \quad \beta > 0, \quad \kappa > 1$$

とする。このとき、

$$\int_0^\infty \phi_{\text{WEI}}(u) du = \frac{\alpha}{\beta}$$

である。 $\kappa > 1$ の場合、カーネルは

$$u_{\text{mode}} = \left(\frac{\kappa-1}{\beta} \right)^{1/\kappa}$$

にピークを持つ。そのため、Weibull 型カーネルは、イベント後に遅れて現れるピークとその後の減衰を同一の枠組みで表現できる。

6 分岐比と減衰指標

Hawkes 過程では、カーネル関数の総質量が自己励起効果の強さを表す重要な指標となる (Hawkes and Oakes, 1974; Bacry et al., 2015). 非マーク付きの一変量 Hawkes 過程において、励起カーネルを $\phi_\psi(u)$ と書くと、分岐比は

$$n^* = \int_0^\infty \phi_\psi(u) du$$

である. 分岐比は、1つの事象が平均的に誘発する直接的な子イベント数として解釈される. 定常的な Hawkes 過程として解釈するためには、通常 $n^* < 1$ が必要である.

本稿では、標準化マーク z_i を用いてマーク効果を $\exp(\gamma z_i)$ として導入する. そのため、マーク効果を含む自己励起の強さを、標本内の経験的指標として

$$\hat{n}^* = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(\hat{\gamma} z_i) \right\} \int_0^\infty \phi_\psi(u; \hat{\vartheta}) du$$

により報告する. ここで、 $\hat{\gamma}$ および $\hat{\vartheta}$ は最尤推定値である. この指標は、母集団上の厳密な分岐比ではなく、観測標本内の平均的なマーク効果を反映した比較指標である. 特に、GPD マーク分布を用いる場合、 $\mathbb{E}\{\exp(\gamma Z)\}$ が理論的に有限とは限らないため、本稿では経験的分岐比を診断的指標として解釈する.

各カーネルにおける総質量と経験的分岐比は表 1 に整理される. ここで、

$$\bar{b}_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(\hat{\gamma} z_i)$$

は、推定されたマーク効果を観測標本上で平均した経験的なマーク倍率である.

分岐比は自己励起効果の総量を表すが、影響がどの程度速く現れ、どの程度持続するかまでは示さない. そのため、本稿では分岐比に加えて、平均遅延時間、90% 質量到達時間、ピーク時点、半減に関する指標、裾の厚さを用いる. 平均遅延時間は

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^\infty u \phi_\psi(u) du}{\int_0^\infty \phi_\psi(u) du}$$

であり、誘発効果が平均的にどの程度後に現れるかを表す. また、正規化累積質量

$$F_\psi(t) = \frac{\int_0^t \phi_\psi(u) du}{\int_0^\infty \phi_\psi(u) du}$$

を用い、 $F_\psi(t_{0.9}) = 0.9$ を満たす $t_{0.9}$ を 90% 質量到達時間とする. これは、カーネル総効果の 90% がどの程度の期間内に現れるかを表す指標である.

さらに、ガンマ分布カーネルや Weibull 型カーネルのような山型カーネルでは、ピーク時点も重要である. ピーク時点が $u = 0$ であればイベント直後に影響が最大となるが、ピーク時点が $u > 0$ であれば、影響が一定の遅れを伴って最大化することを意味する. 半減に関する指標は、カーネル値または

表1 実装上の励起カーネル, カーネル総質量, および経験的分岐比

カーネル	実装上の励起カーネル $\phi_\psi(u)$	カーネル総質量 $\int_0^\infty \phi_\psi(u) du$	経験的分岐比 $\hat{n}^*$
指数関数	$\alpha e^{-\beta u}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\bar{b}_z \frac{\alpha}{\beta}$
指数関数の和	$\alpha_1 e^{-\beta_1 u} + \alpha_2 e^{-\beta_2 u}$	$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}$	$\bar{b}_z \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)$
パワーロー指数減衰	$\alpha e^{-\beta u} (u+c)^{-p}$	$\alpha \int_0^\infty e^{-\beta u} (u+c)^{-p} du$	$\bar{b}_z \alpha \int_0^\infty e^{-\beta u} (u+c)^{-p} du$
QEXP	$\alpha \{1 + (q-1)\beta u\}^{-1/(q-1)}$	$\frac{\alpha}{\beta(2-q)}$	$\bar{b}_z \frac{\alpha}{\beta(2-q)}$
ガンマ分布	$\alpha \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-\beta u}$	α	$\bar{b}_z \alpha$
Weibull 型	$\alpha u^{\kappa-1} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\kappa} u^\kappa \right\}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\bar{b}_z \frac{\alpha}{\beta}$

残存質量が半分になるまでの時間を表し、裾の厚さは長期的な持続性を評価するために用いられる。したがって、カーネル関数を比較する際には、AIC や BIC だけでなく、分岐比と減衰指標を併せて確認する必要がある。

III 推定方法

本節では、前節で定義したマーク付き一変量 Hawkes 過程の完全対数尤度に基づき、パラメータ推定、モデル比較、信頼区間、残差診断の方法を整理する。対数尤度およびマーク分布の定式化は第 II 節で述べたため、ここではそれらを用いた推定手順と診断方法に焦点を当てる。

1 最尤推定

パラメータ推定は、最尤法の標準的な枠組みに従い (Cox and Hinkley, 1974), 式 (7) の完全対数尤度を最大化することによって行う。すなわち、最尤推定量は

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ell_{\text{full}}(\theta)$$

として定義される。ここで、 Θ はパラメータ空間であり、ベースライン強度、励起係数、カーネル形状パラメータ、マーク分布パラメータがそれぞれの定義域を満たすように制約される。実際の数値計算では、対数尤度の最大化と等価な問題として、負の対数尤度

$$-\ell_{\text{full}}(\theta)$$

を最小化する。推定では、 $\mu > 0$, $\alpha \geq 0$, カーネル関数の形状パラメータの正值制約, および GPD の尺度パラメータ $\sigma > 0$ を満たすように、制約付き最適化を行う。また、GPD の形状パラメータ ξ については、すべての観測マーク m_i に対して

$$1 + \xi \frac{m_i}{\sigma} > 0$$

が成り立つ必要がある。Hawkes 過程では、パラメータの組み合わせによっては、分岐比が 1 に近づき、過程が非常に強いクラスタリングを示すことがある。そのため、推定結果の解釈においては、対数尤度の値だけでなく、分岐比、カーネルの減衰指標、推定値の境界張り付き、勾配の大きさ、ヘッセ行列の正定値性を確認する必要がある。特に、複雑なカーネル関数では、尤度関数が平坦になったり、局所解が生じたりする可能性があるため、初期値を変えた推定や、推定後の診断が重要である。本稿では、指数関数、指数関数の和、パワーロー指数減衰関数、QEXP 関数、ガンマ分布カーネル、Weibull 型カーネルの各カーネルについて同一の枠組みで最尤推定を行う。これにより、カーネル関数の違いが、高ボラティリティ・イベントの発生時刻構造の説明力にどのような差をもたらすかを比較する。

2 情報量規準

カーネル関数の比較には、対数尤度に加えて情報量規準を用いる。対数尤度はモデルの当てはまりを表すが、パラメータ数の多いモデルほど大きくなりやすい。そのため、モデルの複雑さを補正した指標として AIC (Akaike, 1974) および BIC (Schwarz, 1978) を用いる。全パラメータ数を p 、イベント数を n とすると、AIC は

$$\text{AIC} = -2\ell_{\text{full}}(\hat{\theta}) + 2p$$

で定義される。また、BIC は

$$\text{BIC} = -2\ell_{\text{full}}(\hat{\theta}) + p \log n$$

で定義される。ここで BIC の罰則項に用いる標本サイズについては、点過程モデルでは観測期間長、イベント数、あるいは離散化された観測日数のいずれを有効標本サイズとみなすかに一定の裁量がある。本稿では、同一系列・同一閾値のもとでカーネル関数を比較することを目的とし、推定対象となるイベント数 n を用いて BIC を計算する。ここでの n は、共通営業日数 2340 ではなく、各閾値により抽出されたイベント数である。すなわち、上位 5%, 10%, 15% の推定では、それぞれ $n = 117$, $n = 234$, $n = 352$ を用いる。したがって、本稿の BIC は、イベント数を有効標本サイズとする便宜的な指標であり、比較対象としたカーネル関数間の相対比較指標として解釈する。AIC および BIC は、いずれも値が小さいほど相対的に望ましいモデルであることを意味する。ただし、AIC は予測性能を重視する傾向があり、BIC はパラメータ数に対してより強いペナルティを課す。そのため、パラメータ数の多いカーネル関数では、対数尤度が改善しても、BIC では十分に支持されない場合がある。複数のカーネル関数を比較する際には、最小の AIC および BIC との差

$$\Delta \text{AIC}_r = \text{AIC}_r - \min_s \text{AIC}_s$$

および

$$\Delta \text{BIC}_r = \text{BIC}_r - \min_s \text{BIC}_s$$

を併せて報告する。ここで、 r および s は比較対象となるカーネル関数を表す。 ΔAIC または ΔBIC が小さいモデルは、情報量規準上の最良モデルに近い候補モデルであり、その値が大きいモデルは相対的

な支持が弱いと解釈される。本稿では、完全対数尤度に基づく AIC および BIC を主要なモデル比較指標として用いる。ただし、カーネル関数の違いは主としてイベント時刻部分に反映されるため、時刻部分対数尤度も同時に確認する。完全対数尤度、時刻部分対数尤度、AIC、BIC を併用することで、マーク分布の当てはまりとイベント時刻構造の当てはまりを区別しながら、カーネル関数の相対的な妥当性を評価する。

3 信頼区間

推定されたパラメータの不確実性を評価するため、信頼区間を計算する。最尤推定量の漸近正規性と Wald 型推論は、標準的な大標本理論に基づく (Cox and Hinkley, 1974; Wald, 1943)。最尤推定量 $\hat{\theta}$ の近傍で正則条件が成り立つ場合、最尤推定量は漸近的に正規分布に従う。すなわち、

$$\hat{\theta} \approx N(\theta_0, \mathcal{I}(\theta_0)^{-1})$$

である。ここで、 $\mathcal{I}(\theta_0)$ は Fisher 情報行列である。実際には、負の対数尤度のヘッセ行列を用いて観測情報行列を近似し、

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta}) = \left[\nabla^2 \{-\ell_{\text{full}}(\hat{\theta})\} \right]^{-1}$$

として分散共分散行列を推定する。このとき、パラメータ θ_j の標準誤差は

$$\widehat{\text{se}}(\hat{\theta}_j) = \sqrt{\left[\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta}) \right]_{jj}}$$

である。Wald 型の 95% 信頼区間は

$$\hat{\theta}_j \pm 1.96 \widehat{\text{se}}(\hat{\theta}_j)$$

によって与えられる。また、Wald 型検定統計量は

$$z_j = \frac{\hat{\theta}_j}{\widehat{\text{se}}(\hat{\theta}_j)}$$

であり、これに基づいて p 値を計算する。ただし、Hawkes 過程の推定では、Wald 型信頼区間が常に適切であるとは限らない。特に、励起係数が 0 に近い場合、形状パラメータが境界に張り付く場合、ヘッセ行列が正定値でない場合、または尤度関数が強く非対称である場合には、正規近似に基づく標準誤差や Wald 型信頼区間は不安定になり得る。このような場合には、プロファイル尤度信頼区間を用いることが有用である (Wilks, 1938)。パラメータ θ_j のプロファイル対数尤度を

$$\ell_p(\theta_j) = \max_{\theta_{-j}} \ell_{\text{full}}(\theta_j, \theta_{-j})$$

と定義する。ここで、 θ_{-j} は θ_j 以外のパラメータを表す。最尤推定値における最大対数尤度を

$$\ell_{\max} = \ell_{\text{full}}(\hat{\theta})$$

とすれば、 θ_j の 95% プロファイル尤度信頼区間は

$$2\{\ell_{\max} - \ell_p(\theta_j)\} \leq \chi_{1,0.95}^2$$

を満たす θ_j の範囲として定義される。ここで、

$$\chi_{1,0.95}^2 = 3.841$$

である。プロファイル尤度信頼区間は、尤度関数の非対称性や境界制約を反映できるため、複雑なカーネル関数や GPD マーク分布を含む推定では特に有用である。一方で、各パラメータの値を固定するたばに残りのパラメータを再最適化する必要があるため、Wald 型信頼区間に比べて計算負荷は大きい。本稿では、ヘッセ行列に基づく標準誤差が安定して得られる場合には Wald 型信頼区間を参考値として用い、境界張り付きやヘッセ行列の非正定値性が確認される場合には、プロファイル尤度信頼区間を重視する。

4 時間変換残差による診断

推定された点過程モデルの当てはまりを確認するため、本稿では時間変換残差を用いる。推定された条件付き強度に基づき、連続するイベント間の補償強度の増分を計算する。モデルが正しく指定されていれば、時間再スケーリング定理により、これらの増分は独立な指数分布に従うと期待される (Brown et al., 2002)。本稿では、この性質に基づいて Kolmogorov–Smirnov 検定を行う。ただし、ここで得られる p 値は、推定済みパラメータに基づく残差診断の指標であり、通常の独立標本に対する厳密な検定結果としてではなく、モデルの当てはまりを評価する補助的な診断指標として解釈する。また、本稿では営業日単位の日次イベント列に連続時間点過程モデルを適用しているため、時間変換残差の診断結果も、日次化されたイベント時刻の離散性を踏まえて解釈する必要がある。より厳密な適合度評価を行うためには、推定済みパラメータの不確実性を考慮したパラメトリック・ブートストラップなどによる確認も今後の課題となる。

本節では、マーク付き一変量 Hawkes 過程の推定方法を整理した。本稿では、完全対数尤度を最大化してパラメータを推定し、完全対数尤度、時刻部分対数尤度、AIC、BIC を併用してカーネル関数を比較する。また、推定値の不確実性については Wald 型信頼区間と、必要に応じてプロファイル尤度信頼区間を用い、推定済み条件付き強度に基づく時間変換残差により点過程モデルとしての当てはまりを診断する。

IV データとイベント定義

1 使用データ

本稿では、日本市場および米国市場における高ボラティリティ局面を比較するため、4 種類の日次ボラティリティ系列を用いる。第 1 に、日経平均株価の RV (以下、日経平均株価 RV) を用いる。第 2 に、S&P 500 の RV (以下、S&P 500 RV) を用いる。これら 2 つの RV 系列は、Oxford–Man Institute of Quantitative Finance の Realized Library から取得した実現分散データに基づいて作成した (Heber et al., 2009)。第 3 に、日経平均 VI を用いる (Nikkei Inc., 2026)。第 4 に、CBOE VIX を用いる (Whaley, 2000; CBOE, 2026)。日経平均 VI および CBOE VIX は Bloomberg から取得した日次の指数値を用いる。

分析期間は2011年1月から2020年12月までとする。ただし、各系列で取引日カレンダーおよび欠損日の扱いが異なるため、本稿では4系列を比較可能な同一標本上で分析する。具体的には、日経平均株価RV、S&P 500 RV、日経平均VI、CBOE VIXのすべてについて観測値が利用可能な営業日のみを残し、共通営業日ベースの標本を作成した。その結果、推定に用いる有効観測日数は、4系列すべてについて2340営業日である。RV系列は事後的に観測される実現ボラティリティを表し、VI/VIX系列はオプション市場に基づく期待変動性を表す系列である。

2 RVの計算

日経平均株価RVおよびS&P 500 RVについては、Realized Libraryに収録されている日次の実現分散を用いる。日次実現分散 rv_t は、高頻度リターンの二乗和に基づく日次の変動尺度である(Barndorff-Nielsen and Shephard, 2002; Andersen et al., 2003)。実現分散の平方根は実現標準偏差、すなわち実現ボラティリティとして解釈される(Barndorff-Nielsen and Shephard, 2002; Andersen et al., 2003)。本稿では、この日次実現ボラティリティを年率換算するため、年 y の観測営業日数を D_y として、

$$RV_t = 100\sqrt{D_y rv_t}$$

を用いる。ここで、 D_y はRV系列を作成する際に用いる年別の観測営業日数であり、第IV節第1項で述べた共通営業日標本の総観測日数とは区別される。以下では、日経平均株価RVおよびS&P 500 RVについては、この年率換算後の RV_t をイベント抽出の基準となるボラティリティ系列として用いる。一方、日経平均VIおよびCBOE VIXについては、Bloombergから取得した日次の指数値をそのまま用い、追加的な年率換算は行わない。

3 高ボラティリティ・イベントと閾値の設定

各ボラティリティ系列について、高ボラティリティ局面を点過程のイベントとして定義する。分析対象となるボラティリティ系列を一般に

$$X_1, X_2, \dots, X_T$$

と表す。ここで、 X_t は日次 t におけるボラティリティ指標であり、RV系列では年率換算されたRV、VI/VIX系列では各ボラティリティ指数の値を表す。

本稿では、各系列の標本内順位に基づき、上位 $p\%$ に相当する観測値を高ボラティリティ・イベントとして扱う。これは、標本内順位により上位観測値を抽出し、その境界値との差を扱う点で、Peak-over-threshold型の考え方と整合的である(Pickands, 1975; Embrechts et al., 1997)。ただし、本稿の実装では、まず標本内順位によりイベント集合を決定し、そのイベント集合に対応する境界値として $u_{d,p}$ を定める。具体的には、

$$p \in \{5, 10, 15\}$$

とし、上位5%、10%、15%の3種類の上位比率に基づいてイベント系列を作成する。上位5%は特に極端なボラティリティ局面、上位10%は比較的強い高ボラティリティ局面、上位15%はやや広い意味での高ボラティリティ局面を表す。

データ系列を d とし、系列 d における上位 $p\%$ イベントの境界値を $u_{d,p}$ と表す。本稿の実装では、

4 系列を共通営業日ベースの 2340 営業日に揃えたうえで、各系列を標本内順位に基づいて並べ替え、上位比率に対応する観測値を抽出する。抽出に用いるイベント数を n_p と書くと、

$$n_5 = 117, \quad n_{10} = 234, \quad n_{15} = 352$$

である。したがって、上位 5%、10%、15% の推定では、各系列でそれぞれ 117, 234, 352 個のイベントを用いる。上位 15% についても、実装上の順位処理に基づき 352 件を用いる。以下では、このイベント集合を上位 15% イベントと略記する。

各境界値 $u_{d,p}$ は、標本内順位により抽出されたイベント集合の境界値として定義する。この定義により、4 系列を同一営業日数かつ同一イベント数のもとで比較できる。

上位順位により抽出されたイベント日を

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

と表し、 $\{t_i\}_{i=1}^n$ を Hawkes 過程におけるイベント時刻として用いる。イベント時刻は営業日ベースで測定し、非取引日は分析対象から除外する。したがって、本稿の Hawkes 過程は、暦日ではなく取引日を時間単位とする点過程として定式化される。なお、営業日単位のイベント列に連続時間点過程モデルを適用するため、推定された短期ピークの解釈には日次データの離散性を考慮する必要がある。

各系列ごとに境界値を設定する理由は、RV 系列、VI 系列、VIX 系列では水準や変動幅が異なるためである。共通の絶対水準を境界値として用いるのではなく、各系列の標本内順位に基づく相対的な上位比率を用いることで、系列間で比較可能な高ボラティリティ局面を抽出する。

4 マークの定義

マーク付き一変量 Hawkes 過程におけるマークの一般的な定義は、第 II 節第 4 項で述べたとおりである。すなわち、観測されるイベントを式 (3) のように (t_i, m_i) と表し、本稿では式 (4) に基づいて、イベント時点のボラティリティ指標と境界値との差をマークとして用いる。

系列 d の上位 $p\%$ イベントに対して、第 IV 節第 3 項で定めた境界値 $u_{d,p}$ を使い、マークは $m_i = X_{t_i} - u_{d,p}$ ($i = 1, \dots, n$) で与えられる。これは、抽出されたイベント時点におけるボラティリティ指標と境界値との差であり、イベント規模を表す非負の量である。推定では、第 II 節第 4 項の式 (5) に従って m_i を標準化し、標準化マーク z_i を条件付き強度に導入する。したがって、異なる系列間でマークの水準を直接比較するのではなく、各系列内で標準化されたイベント規模がその後の発生強度に与える影響として解釈する。

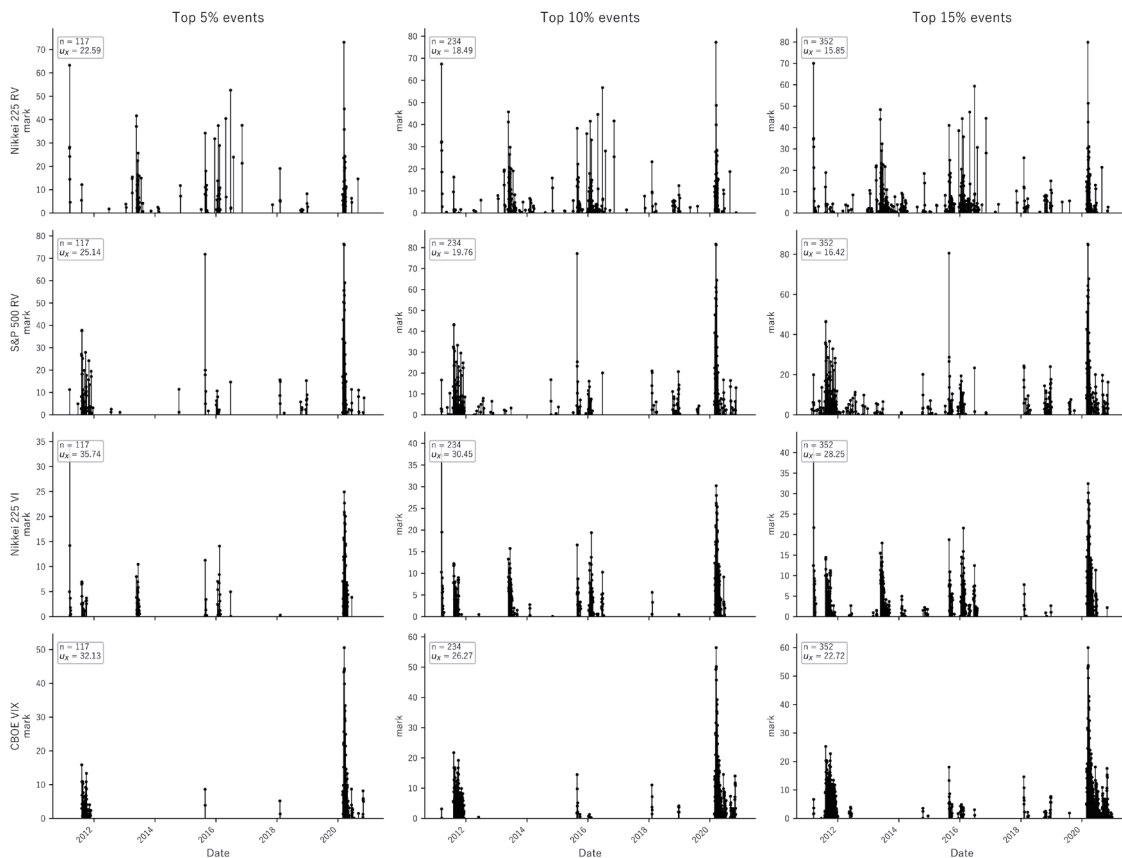
5 マーク付きステムプロットによる確認

前節までに定義した高ボラティリティ・イベントの時点と規模を視覚的に確認するため、図 1 に、各系列・各閾値に基づいて抽出したイベントのステムプロットを示す。各パネルにおいて、横軸は日付、縦軸はイベント時点における水準超過幅 $X_{t_i} - u_{d,p}$ を表す。

図 1 から、高ボラティリティ・イベントは観測期間全体に一樣に発生しているのではなく、特定の時期に集中して発生している傾向が視覚的に示されている。ただし、図 1 は探索的な確認であり、自己励起性の有無や強さについては、第 V 節以降の推定結果および残差診断と併せて検討する。また、ステムの高さにはばらつきがあり、同じ高ボラティリティ・イベントであっても水準超過幅が異なる。

図1

4種類のボラティリティ系列における高ボラティリティ・イベントのステムプロット。各行は上から日経平均株価 RV, S&P 500 RV, 日経平均 VI, CBOE VIX を表し, 各列は左から上位 5%, 10%, 15% のイベント系列を表す。横軸は日付, 縦軸は各イベントの水準超過幅 $X_{t_i} - u_{d,p}$ を表す。図中の “mark” は水準超過幅を, u_X は各パネルで用いた境界値を表す。各系列は共通営業日ベースの 2340 営業日に揃えている。



したがって、イベント時刻に加えて、イベント規模をマークとして明示的に扱うことは、実証分析上有用である。さらに、上位比率を広げるにつれて抽出されるイベント数が増加するため、第V節以降では、各閾値についてカーネル関数を比較し、推定結果の閾値依存性を確認する。

V 実証結果

以下では、データ系列を分析の主単位とし、各系列について上位 5%, 10%, 15% の閾値ごとに 6 種類のカーネル関数の推定結果を示した後、主要結果を要約表に整理して閾値間の比較を行う。詳細表には、完全対数尤度、Hawkes 過程に対応する時刻部分対数尤度、AIC, BIC, K-S 検定の p 値、およびマーク効果込みの経験的分岐比を示す。パラメータ推定値、標準誤差、信頼区間および p 値は付録 A

に示す．

本節で報告する BIC は，第 III 節第 2 項で定義したとおり，推定対象となるイベント数 n を有効標本サイズとして計算する．ここでの n は共通営業日数 2340 ではなく，各閾値により抽出されたイベント数である．すなわち，上位 5%，10%，15% の推定では，それぞれ $n=117$ ， $n=234$ ， $n=352$ を用いる．

なお，3 種類の閾値ではイベント数および推定標本が異なるため，閾値間で AIC および BIC の絶対値を直接比較しない．以下では，各閾値内で選択されたカーネル関数，次点モデルとの差，経験的分岐比，カーネル形状および残差診断を系列ごとに比較する．また，上位 5%，10%，15% のイベント集合は包含関係を持つため，閾値間の違いは独立標本間の差ではなく，閾値設定に対する感応度として解釈する．

本節でいう「情報量規準上の最良モデル」は，比較対象とした 6 種類のカーネル関数の中で AIC および BIC が最も小さく，相対的に支持されるモデルを意味する．ただし，これは情報量規準に基づく相対的評価であり，K-S 検定を含む残差診断まで満たした絶対的に十分なモデルであることを意味しない．また，境界解，ヘッセ行列の非正定値性，標準誤差の不安定性が確認される場合には，Wald 型の標準誤差，信頼区間および p 値は参考的な値として扱う．したがって，推定結果は，情報量規準，時刻部分対数尤度，K-S 検定，経験的分岐比，カーネル形状，および推定安定性を併せて解釈する．特に，山型カーネルのピークが 1 営業日付近に鋭く集中する場合には，市場反応の時間構造を直接識別したものではなく，日次営業日ベースのイベント列への相対的適合として慎重に扱う．

1 日経平均株価 RV

(1) 上位 5% イベント

推定結果を表 2 に示す．

表 2 日経平均株価 RV 上位 5% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-750.149	-334.845	1512.297	31.279	1528.870	28.517	0.00823	0.743
指数関数の和	-750.149	-334.845	1516.297	35.279	1538.394	38.041	0.00823	0.743
パワーロー指数減衰	-750.152	-334.848	1516.304	35.286	1538.401	38.048	0.00819	0.743
QEXP	-750.149	-334.845	1514.297	33.279	1533.632	33.279	0.00823	0.743
ガンマ分布	-733.509	-318.205	1481.018	0.000	1500.353	0.000	0.00265	0.688
Weibull 型	-737.635	-322.331	1489.270	8.252	1508.605	8.252	0.02602	0.688

表 2 より，AIC および BIC が最小となるのはガンマ分布カーネルであり，Weibull 型カーネルが次点である．ただし，いずれのモデルでも K-S 検定は 5% 水準で棄却されるため，この結果は残差診断まで含めた十分な適合ではなく，比較対象内での相対的な適合として解釈する必要がある．カーネル形状を見ると，ガンマ分布カーネルのピーク時点は約 1.305，平均遅延時間は約 1.581，90% 質量到達時間は約 2.465 であり，単調減衰型よりも短期の遅延ピークを持つ山型カーネルが相対的に高い適合を示している．

(2) 上位 10% イベント

推定結果を表 3 に示す.

表 3 日経平均株価 RV 上位 10% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-1335.662	-593.500	2683.325	24.902	2704.057	21.446	0.000024	0.774
指数関数の和	-1332.773	-590.611	2681.547	23.124	2709.189	26.579	0.000009	0.839
パワーロー指数減衰	-1335.662	-593.500	2687.325	28.902	2714.967	32.357	0.000024	0.774
QEXP	-1335.607	-593.444	2685.213	26.790	2709.401	26.790	0.000039	0.802
ガンマ分布	-1322.212	-580.049	2658.423	0.000	2682.610	0.000	0.002157	0.736
Weibull 型	-1326.373	-584.210	2666.746	8.323	2690.933	8.323	0.001906	0.746

表 3 では, ガンマ分布カーネルが AIC および BIC の最小値を与え, Weibull 型カーネルが対抗モデルとなる. ガンマ分布カーネルのピーク時点は約 1.745, 平均遅延時間は約 3.000, 90% 質量到達時間は約 5.599 であり, 数日程度の短期的な遅延効果を表している. ただし, ガンマ分布カーネルおよび Weibull 型カーネルの K-S 検定はいずれも 5% 水準で棄却されるため, 情報量規準に基づく相対比較として解釈する.

(3) 上位 15% イベント

推定結果を表 4 に示す.

表 4 日経平均株価 RV 上位 15% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-1880.845	-801.001	3773.690	18.114	3796.872	14.250	$< 10^{-6}$	0.843
指数関数の和	-1880.845	-801.001	3777.690	22.114	3808.600	25.977	$< 10^{-6}$	0.843
パワーロー指数減衰	-1880.749	-800.905	3777.497	21.920	3808.406	25.784	$< 10^{-6}$	0.848
QEXP	-1880.571	-800.728	3775.143	19.566	3802.188	19.566	$< 10^{-6}$	0.853
ガンマ分布	-1870.788	-790.945	3755.577	0.000	3782.622	0.000	$< 10^{-6}$	0.803
Weibull 型	-1874.935	-795.091	3763.870	8.294	3790.916	8.294	$< 10^{-6}$	0.811

表 4 より, 上位 15% イベントでもガンマ分布カーネルが情報量規準上の最良モデルであり, Weibull 型カーネルが有力な対抗モデルである. ガンマ分布カーネルではピーク時点が約 2.060, 平均遅延時間が約 4.362, 90% 質量到達時間が約 8.594 であり, 上位 5%・10% よりやや長い時間スケールの山型構造が推定されている. 一方, すべてのモデルで K-S 検定は棄却されるため, 残差診断上の課題は残る.

(4) 閾値間の比較

表 5 は、日経平均株価 RV について、各閾値内で情報量規準上最良となったモデルの主要結果を比較したものである。なお、表中の AIC は各閾値内で最良モデルを確認するために示しており、閾値間でその絶対値を直接比較しない。

表 5 日経平均株価 RV：閾値別の主要結果

上位比率	イベント数	最良カーネル	AIC	次点との Δ AIC	K-S p 値	経験的 分岐比	ピーク時点 (営業日)
5%	117	ガンマ分布	1481.018	8.252	0.00265	0.688	1.305
10%	234	ガンマ分布	2658.423	8.323	0.002157	0.736	1.745
15%	352	ガンマ分布	3755.577	8.294	$< 10^{-6}$	0.803	2.060

表 5 に基づいて 3 種類の閾値を系列内で比較すると、すべての閾値でガンマ分布カーネルが最良となり、次点の Weibull 型カーネルに対する Δ AIC も 8.252, 8.323, 8.294 とほぼ一定である。閾値を上位 5% から 15% へ広げるにつれて、経験的分岐比は 0.688, 0.736, 0.803 と上昇し、ピーク時点も 1.305, 1.745, 2.060 営業日へ遅くなる。したがって、日経平均株価 RV では、より広い高ボラティリティ状態を含めるほど自己励起性と影響の時間スケールが大きくなる傾向がみられる。ただし、すべての閾値で K-S 検定が棄却されているため、この傾向は比較対象内での相対的な結果である。

2 S&P 500 RV

(1) 上位 5% イベント

推定結果を表 6 に示す。

表 6 S&P 500 RV 上位 5% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-739.490	-318.272	1490.981	12.451	1507.554	9.689	0.01600	0.818
指数関数の和	-737.401	-316.183	1490.801	12.272	1512.899	15.034	0.00477	0.854
パワーロー指数減衰	-738.656	-317.438	1493.312	14.782	1515.409	17.544	0.00979	0.848
QEXP	-738.600	-317.382	1491.200	12.671	1510.535	12.671	0.01189	0.843
ガンマ分布	-732.265	-311.047	1478.530	0.000	1497.865	0.000	0.08555	0.773
Weibull 型	-734.599	-313.380	1483.197	4.667	1502.532	4.667	0.09424	0.773

表 6 では、AIC および BIC はガンマ分布カーネルで最小となる。Weibull 型カーネルとの差は比較的小さく、さらに K-S 検定の p 値はガンマ分布カーネルで 0.08555、Weibull 型カーネルで 0.09424 と 5% 水準では棄却されない。形状面では、ガンマ分布カーネルのピーク時点は約 1.704、Weibull 型カーネルのピーク時点は約 1.931 であり、1.5 日から 2 日程度の遅れを伴う山型構造が示唆される。

(2) 上位 10% イベント

推定結果を表 7 に示す。

表 7 S&P 500 RV 上位 10% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-1321.870	-544.222	2655.740	13.845	2676.471	10.389	2.3×10^{-5}	0.866
指数関数の和	-1321.874	-544.226	2659.749	17.854	2687.391	21.309	3.4×10^{-5}	0.866
パワーロー指数減衰	-1321.870	-544.222	2659.740	17.845	2687.382	21.300	2.3×10^{-5}	0.866
QEXP	-1321.870	-544.222	2657.740	15.845	2681.927	15.845	2.3×10^{-5}	0.866
ガンマ分布	-1313.948	-536.299	2641.895	0.000	2666.082	0.000	4.6×10^{-5}	0.845
Weibull 型	-1316.603	-538.955	2647.206	5.311	2671.393	5.311	1.8×10^{-4}	0.852

表 7 より、ガンマ分布カーネルが情報量規準上の最良モデルであり、Weibull 型カーネルが対抗モデルである。ただし、両モデルとも K-S 検定は 5% 水準で棄却される。ガンマ分布カーネルのピーク時点は約 2.082、平均遅延時間は約 4.786、90% 質量到達時間は約 9.583 であり、S&P 500 RV 上位 10% イベントでは、単調減衰型よりも数日程度の遅延を伴う山型カーネルが相対的に良好である。

(3) 上位 15% イベント

推定結果を表 8 に示す。

表 8 S&P 500 RV 上位 15% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-1902.190	-759.090	3816.380	1433.060	3839.562	1429.197	2.63×10^{-8}	0.878
指数関数の和	-1902.190	-759.090	3820.380	1437.060	3851.289	1440.924	2.63×10^{-8}	0.878
パワーロー指数減衰	-1902.194	-759.094	3820.387	1437.067	3851.296	1440.931	2.53×10^{-8}	0.878
QEXP	-1902.190	-759.090	3818.380	1435.060	3845.425	1435.060	2.62×10^{-8}	0.878
ガンマ分布	-1184.660	-41.560	2383.320	0.000	2410.365	0.000	$< 10^{-6}$	0.652
Weibull 型	-1883.229	-740.129	3780.458	1397.139	3807.504	1397.139	9.68×10^{-16}	0.744

表 8 では、ガンマ分布カーネルが AIC および BIC で大きく優位となる。ただし、その形状パラメータとレートパラメータは非常に大きく、カーネル質量はほぼ 1 営業日後に集中している。K-S 検定も棄却されるため、この結果は翌営業日付近の集中に連続時間カーネルが鋭く適合した可能性を含めて慎重に解釈する必要がある。Weibull 型カーネルは情報量規準では劣るが、より緩やかな短期的遅延効果を表す対抗モデルである。

(4) 閾値間の比較

表 9 は、S&P 500 RV について、各閾値内で情報量規準上最良となったモデルの主要結果を比較したものである。なお、表中の AIC は各閾値内で最良モデルを確認するために示しており、閾値間でその絶対値を直接比較しない。

表 9 S&P 500 RV：閾値別の主要結果

上位比率	イベント数	最良カーネル	AIC	次点との Δ AIC	K-S p 値	経験的 分岐比	ピーク時点 (営業日)
5%	117	ガンマ分布	1478.530	4.667	0.08555	0.773	1.704
10%	234	ガンマ分布	2641.895	5.311	4.6×10^{-5}	0.845	2.082
15%	352	ガンマ分布	2383.320	1397.139	$< 10^{-6}$	0.652	$\simeq 1$

表 9 に基づいて系列内で比較すると、3 種類の閾値すべてでガンマ分布カーネルが最良となる。上位 5% ではガンマ分布と Weibull 型のいずれも K-S 検定で棄却されず、1.5 日から 2 日程度の遅延ピークが比較的安定して示される。上位 10% ではピーク時点が 2.082 営業日、経験的分岐比が 0.845 となる一方、K-S 検定は棄却される。上位 15% では経験的分岐比が 0.652 に低下し、カーネルがほぼ 1 営業日後に極端に集中するため、閾値を広げるにつれて単調に自己励起性や持続性が強まるとはいえない。特に上位 15% の結果には推定不安定性を考慮する必要がある。

3 日経平均 VI

(1) 上位 5% イベント

推定結果を表 10 に示す。

表 10 日経平均 VI 上位 5% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-568.967	-239.719	1149.934	28.584	1166.507	25.822	3.0×10^{-6}	0.913
指数関数の和	-568.967	-239.719	1153.934	32.584	1176.032	35.346	3.0×10^{-6}	0.913
パワーロー指数減衰	-568.967	-239.719	1153.934	32.584	1176.032	35.346	3.0×10^{-6}	0.913
QEXP	-568.967	-239.719	1151.934	30.584	1171.270	30.584	3.0×10^{-6}	0.913
ガンマ分布	-553.675	-224.427	1121.351	0.000	1140.686	0.000	$< 10^{-6}$	0.907
Weibull 型	-556.961	-227.713	1127.921	6.571	1147.257	6.571	9.4×10^{-7}	0.908

表 10 より、日経平均 VI 上位 5% イベントではガンマ分布カーネルが情報量規準上の最良モデルであり、Weibull 型カーネルが次点である。ガンマ分布カーネルのピーク時点は約 1.662、平均遅延時間は約 2.518、90% 質量到達時間は約 4.486 である。ただし、すべてのモデルで K-S 検定は棄却されるため、点過程モデルとしての絶対的な適合にはなお課題が残る。

(2) 上位 10% イベント

推定結果を表 11 に示す.

表 11 日経平均 VI 上位 10% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-1112.503	-427.282	2237.007	1282.586	2257.739	1279.130	2.89×10^{-14}	0.923
指数関数の和	-1112.503	-427.282	2241.007	1286.586	2268.649	1290.041	2.89×10^{-14}	0.923
パワーロー指数減衰	-1112.503	-427.282	2241.007	1286.586	2268.649	1290.041	2.91×10^{-14}	0.923
QEXP	-1112.503	-427.282	2239.007	1284.586	2263.194	1284.586	2.92×10^{-14}	0.923
ガンマ分布	-470.211	215.011	954.421	0.000	978.609	0.000	$< 10^{-6}$	0.846
Weibull 型	-1091.792	-406.570	2197.585	1243.164	2221.772	1243.163	5.06×10^{-17}	0.909

表 11 では, ガンマ分布カーネルが情報量規準上, 他のカーネルより明確に支持される. しかし, 形状パラメータとレートパラメータが極端に大きく, ピーク時点, 平均遅延時間, 90% 質量到達時間はいずれもほぼ 1 営業日前後に集中する. したがって, ガンマ分布カーネルを情報量規準上の最良モデルとしつつ, この鋭いピークは日次イベント間隔への適合として慎重に解釈する. Weibull 型カーネルは情報量規準では劣るが, より緩やかな短期遅延構造を表す対抗モデルである.

(3) 上位 15% イベント

推定結果を表 12 に示す.

表 12 日経平均 VI 上位 15% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-1618.272	-616.030	3248.545	2592.812	3271.726	2588.948	1.93×10^{-23}	0.928
指数関数の和	-1618.272	-616.030	3252.545	2596.812	3283.454	2600.676	1.93×10^{-23}	0.928
パワーロー指数減衰	-1618.272	-616.030	3252.545	2596.812	3283.454	2600.676	1.96×10^{-23}	0.927
QEXP	-1618.272	-616.030	3250.545	2594.812	3277.590	2594.812	1.96×10^{-23}	0.927
ガンマ分布	-320.866	681.376	655.733	0.000	682.778	0.000	$< 10^{-6}$	0.846
Weibull 型	-1577.092	-574.849	3168.183	2512.450	3195.229	2512.450	2.71×10^{-48}	0.871

表 12 でも, ガンマ分布カーネルが AIC および BIC で大きく優位である. 一方で, 推定されたカーネルはほぼ 1 営業日後に極端に集中し, ヘッセ行列の正定値性にも注意を要する. K-S 検定も棄却されるため, 情報量規準上の最良モデルであることと, 点過程モデルとして十分な適合を示すことは区別して解釈する必要がある. Weibull 型カーネルは, 推定安定性と解釈可能性を重視する場合の対抗モデルである.

(4) 閾値間の比較

表 13 は、日経平均 VI について、各閾値内で情報量規準上最良となったモデルの主要結果を比較したものである。なお、表中の AIC は各閾値内で最良モデルを確認するために示しており、閾値間でその絶対値を直接比較しない。

表 13 日経平均 VI：閾値別の主要結果

上位比率	イベント数	最良カーネル	AIC	次点との Δ AIC	K-S p 値	経験的 分岐比	ピーク時点 (営業日)
5%	117	ガンマ分布	1121.351	6.571	$< 10^{-6}$	0.907	1.662
10%	234	ガンマ分布	954.421	1243.164	$< 10^{-6}$	0.846	$\simeq 1$
15%	352	ガンマ分布	655.733	2512.450	$< 10^{-6}$	0.846	$\simeq 1$

表 13 に基づいて 3 種類の閾値を系列内で比較すると、いずれもガンマ分布カーネルが最良となるが、カーネル形状は同一ではない。上位 5% ではピーク時点が 1.662 営業日であるのに対し、上位 10% および 15% ではほぼ 1 営業日後に極端に集中する。経験的分岐比は 0.907, 0.846, 0.846 と高い水準にあるが、すべての閾値で K-S 検定が棄却され、上位 15% ではヘッセ行列の正定値性にも注意を要する。したがって、閾値を広げても結論が単純に強まるとは解釈せず、上位 10%・15% の鋭いピークは日次データへの相対的適合として扱う。

4 CBOE VIX

(1) 上位 5% イベント

推定結果を表 14 に示す。

表 14 CBOE VIX 上位 5% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-593.133	-220.366	1198.266	21.065	1214.840	18.303	3.0×10^{-6}	0.944
指数関数の和	-591.373	-218.606	1198.746	21.545	1220.844	24.307	1.1×10^{-6}	0.960
パワーロー指数減衰	-593.132	-220.364	1202.263	25.062	1224.361	27.824	4.0×10^{-6}	0.944
QEXP	-592.804	-220.037	1199.609	22.408	1218.944	22.408	1.0×10^{-5}	0.954
ガンマ分布	-581.601	-208.833	1177.201	0.000	1196.536	0.000	$< 10^{-6}$	0.925
Weibull 型	-584.649	-211.882	1183.299	6.098	1202.634	6.098	4.4×10^{-7}	0.925

表 14 より、CBOE VIX 上位 5% イベントではガンマ分布カーネルが情報量規準上の最良モデルであり、Weibull 型カーネルが次点である。ガンマ分布カーネルのピーク時点は約 1.611、平均遅延時間は約 2.266、90% 質量到達時間は約 3.899 であり、1.5 日から 2 日程度の遅延ピークが示唆される。ただし、すべてのモデルで K-S 検定は棄却されるため、結果は相対的な適合として解釈する。

(2) 上位 10% イベント

推定結果を表 15 に示す。

表 15 CBOE VIX 上位 10% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-1116.421	-374.990	2244.842	1563.789	2265.574	1560.334	5.11×10^{-20}	0.955
指数関数の和	-1116.421	-374.990	2248.842	1567.789	2276.484	1571.244	5.11×10^{-20}	0.955
パワーロー指数減衰	-1116.421	-374.990	2248.842	1567.789	2276.484	1571.244	5.20×10^{-20}	0.955
QEXP	-1116.421	-374.990	2246.842	1565.789	2271.029	1565.789	5.19×10^{-20}	0.955
ガンマ分布	-333.526	407.905	681.053	0.000	705.240	0.000	$< 10^{-6}$	0.910
Weibull 型	-1086.621	-345.190	2187.242	1506.189	2211.429	1506.189	3.13×10^{-38}	0.942

表 15 では、ガンマ分布カーネルが AIC および BIC で大きく優位となる。ただし、形状パラメータとレートパラメータは非常に大きく、ピーク時点および平均遅延時間はほぼ 1 営業日である。また、ヘッセ行列は正定値ではなく、K-S 検定も棄却される。したがって、ガンマ分布カーネルを情報量規準上の最良モデルとしつつ、Weibull 型カーネルを推定安定性と解釈可能性を重視した対抗モデルとして扱う。

(3) 上位 15% イベント

推定結果を表 16 に示す。

表 16 CBOE VIX 上位 15% イベントに基づくカーネル関数の比較

カーネル	完全対数 尤度	時刻部分 対数尤度	AIC	Δ AIC	BIC	Δ BIC	K-S p 値	経験的 分岐比
指数関数	-1683.525	-566.629	3379.051	3053.244	3402.232	3049.380	1.77×10^{-28}	0.952
指数関数の和	-1683.525	-566.629	3383.051	3057.244	3413.960	3061.107	1.77×10^{-28}	0.952
パワーロー指数減衰	-1683.527	-566.630	3383.055	3057.248	3413.964	3061.111	1.85×10^{-28}	0.952
QEXP	-1683.525	-566.629	3381.051	3055.244	3408.096	3055.244	1.81×10^{-28}	0.952
ガンマ分布	-566.787	550.110	1147.574	821.767	1174.619	821.767	$< 10^{-6}$	0.904
Weibull 型	-155.903	960.993	325.807	0.000	352.852	0.000	9.79×10^{-85}	0.904

表 16 では、他の閾値と異なり Weibull 型カーネルが情報量規準上の最良モデルであり、ガンマ分布カーネルが対抗モデルである。ただし、Weibull 型カーネルの形状パラメータは推定上限に到達しており、カーネル質量はほぼ 1 営業日後に極端に集中している。K-S 検定も棄却されるため、この結果は CBOE VIX 上位 15% イベントにおける翌営業日付近の集中と整合的である一方、境界解としての性質を踏まえて慎重に解釈する必要がある。

(4) 閾値間の比較

表 17 は、CBOE VIX について、各閾値内で情報量規準上最良となったモデルの主要結果を比較したものである。なお、表中の AIC は各閾値内で最良モデルを確認するために示しており、閾値間でその絶対値を直接比較しない。

表 17 CBOE VIX：閾値別の主要結果

上位比率	イベント数	最良カーネル	AIC	次点との Δ AIC	K-S p 値	経験的 分岐比	ピーク時点 (営業日)
5%	117	ガンマ分布	1177.201	6.098	$< 10^{-6}$	0.925	1.611
10%	234	ガンマ分布	681.053	1506.189	$< 10^{-6}$	0.910	$\simeq 1$
15%	352	Weibull 型	325.807	821.767	9.79×10^{-85}	0.904	$\simeq 1$

表 17 に基づいて系列内で比較すると、上位 5% と 10% ではガンマ分布カーネル、上位 15% では Weibull 型カーネルが最良となり、最良カーネルは閾値に対して完全には頑健ではない。上位 5% では 1.611 営業日の遅延ピークが推定される一方、上位 10%・15% ではほぼ 1 営業日後への極端な集中がみられる。経験的分岐比は 0.925, 0.910, 0.904 と一貫して高いが、すべての閾値で K-S 検定が棄却され、上位 10% ではヘッセ行列が非正定値、上位 15% では Weibull 型の形状パラメータが推定上限に到達している。したがって、高い自己励起性という傾向と、カーネル形状・推定安定性に関する留保を併せて解釈する必要がある。

VI 考 察

本節では、第 V 節の推定結果を横断的に整理し、RV 系列と VI/VIX 系列の違い、日本市場と米国市場の違い、カーネル形状とマーク効果の解釈、および結果を読む際の留意点を考察する。第 V 節で示した個別の推定値は、ここでは必要な範囲で要約し、主として系列間・市場間の相対的な特徴に焦点を当てる。

1 RV と VI/VIX の違い

RV は事後的に観測される価格変動の大きさを表す実現ボラティリティであるのに対し、VI/VIX はオプション市場に基づく将来変動への期待を反映するボラティリティ指数である。本稿では、これらをいずれも高ボラティリティ・イベントとして点過程化し、同一のマーク付き一変量 Hawkes 過程の枠組みで比較した。

第 V 節の結果から、RV 系列と VI/VIX 系列に共通して、単調減衰型カーネルよりも、ガンマ分布カーネルまたは Weibull 型カーネルのような山型カーネルが情報量規準上、比較対象内で相対的に良好な適合を示す傾向が確認された。これは、高ボラティリティ・イベントの影響がイベント直後に最大となつて単調に減衰するだけでなく、一定の遅れを伴って強まる構造を含む可能性を示唆する結果である。

一方で、RV 系列と VI/VIX 系列では、自己励起性の現れ方に違いがみられる。RV 系列では、日経平均株価 RV と S&P 500 RV のいずれにおいても、ガンマ分布カーネルが各閾値で情報量規準上の最良モデルとなった。特に上位 5% および 10% では、数日程度の短期的な遅延効果を持つ山型カーネル

として解釈できる場合が多い。これに対して、VI/VIX 系列では、上位 10% および 15% のイベントにおいて、推定された山型カーネルがほぼ 1 営業日付近に集中するケースが多くみられた。これは、高水準のボラティリティ指数が短期間に連続して観測されやすいという時刻構造と整合的である。

経験的分岐比についても、VI/VIX 系列は RV 系列より高い値を示しやすい。とくに日経平均 VI および CBOE VIX では、標本内の経験的分岐比が 1 に近い値として推定される場合がある。ただし、本稿で報告する経験的分岐比は、標本内の平均的なマーク効果を反映した比較指標であり、母集団上の厳密な定常性条件を直接確認するものではない。

マーク効果の観点では、RV 系列の方が比較的明瞭な結果を示している。日経平均株価 RV および S&P 500 RV では、境界値との差として定義される水準超過幅が、その後のイベント発生強度と正に関連する傾向が推定された。これに対して、VI/VIX 系列では、マーク効果は必ずしも一貫して有意ではない。このことは、RV 系列ではイベント規模そのものがその後の高ボラティリティ状態と関連しやすい一方、VI/VIX 系列ではイベント規模よりも、高水準の指数値が短期間に連続して現れる時刻構造の方が相対的に重要である可能性を示唆している。

2 日本市場と米国市場の違い

日本市場と米国市場を比較すると、実現ボラティリティ系列とボラティリティ指数系列で異なる特徴がみられる。まず、RV 系列については、日経平均株価 RV と S&P 500 RV の双方で、すべての閾値においてガンマ分布カーネルが情報量規準上の最良モデルとなった。この点では、日米の RV 系列はいずれも、単調減衰型よりも遅延を伴う山型カーネルと整合的な時刻構造を持つ。

ただし、RV 系列における日米差は一方向ではない。上位 5% および 10% のイベントでは、S&P 500 RV の方が日経平均株価 RV よりも経験的分岐比が高く、自己励起効果の時間スケールもやや長く推定される傾向がある。一方、上位 15% のイベントでは、日経平均株価 RV の方が高い経験的分岐比を示し、より広い高ボラティリティ局面で持続性が推定される。したがって、RV 系列に関する市場間の違いは、上位比率に依存する実証的傾向として解釈する必要がある。

ボラティリティ指数系列では、CBOE VIX の方が日経平均 VI よりも経験的分岐比が高く推定される傾向がある。また、CBOE VIX では、特に上位 15% イベントにおいて Weibull 型カーネルが情報量規準上の最良モデルとなり、翌営業日付近への強い集中が推定された。日経平均 VI でも上位 10% および 15% で 1 営業日付近への集中がみられるが、経験的分岐比の水準は CBOE VIX の方が高い。この結果は、比較対象としたモデル群の範囲では、米国のボラティリティ指数に基づく高ボラティリティ・イベントの方が、短期的に連続して発生しやすい形で推定されていることを示している。

ただし、これらの比較は、採用した分析期間、閾値水準、日次営業日ベースのイベント定義、および比較対象としたカーネル関数に依存する。したがって、本稿の結果は、市場間の恒常的な構造差を直接示すものではなく、本稿の設定のもとで得られた実証的傾向として理解すべきである。

3 カーネル形状とマーク効果の解釈

本稿で比較した 6 種類のカーネル関数の中では、多くの系列・閾値でガンマ分布カーネルまたは Weibull 型カーネルが良好な情報量規準を示した。これらの山型カーネルは、イベント発生直後ではなく、正の時間遅れを伴って励起効果が最大となる構造を表す。したがって、高ボラティリティ・イベントの発生構造は、単純な即時反応と単調減衰だけでは十分に記述されず、短期的な遅延ピークを含む可

能性がある。

もっとも、山型カーネルが選択されることをそのまま市場反応の時間幅として解釈することには注意が必要である。本稿では営業日単位のイベント時刻を用いているため、1 営業日付近に鋭く集中する推定結果は、高ボラティリティ・イベントが連続営業日に発生しやすい経験的構造を捉えている可能性がある一方で、連続時間カーネルが日次データの離散的な間隔に適合した結果である可能性もある。特に、形状パラメータが非常に大きく推定される場合や推定上限に到達する場合には、境界解または局所解の可能性を含めて慎重に扱う必要がある。

マーク効果については、RV 系列と VI/VIX 系列で解釈が異なる。RV 系列では、水準超過幅が大きいイベントほど、その後のイベント発生強度を高める傾向が比較的明瞭に推定された。これは、実際に観測された価格変動の規模が、その後の高ボラティリティ状態の発生と関連している可能性を示唆する。一方、VI/VIX 系列では、マーク効果が一貫して有意とはいえ、イベントの大きさよりも高水準の状態が短期間に連続する時刻構造の方が重要である可能性がある。この違いは、RV が実現した変動の大きさを表すのに対し、VI/VIX が市場参加者の将来不確実性に対する評価を反映するという系列の性質と整合的である。

4 解釈上の留意点

本稿の結果を解釈する際には、いくつかの点に注意する必要がある。第 1 に、多くのケースで時間変換残差に対する K-S 検定が 5% 水準で棄却されている。したがって、本稿でいう情報量規準上の最良モデルは、比較対象としたカーネル関数の中で相対的に望ましいモデルを意味するのであり、残差診断まで含めて十分に妥当な点過程モデルであることを意味しない。

第 2 に、1 営業日付近に極端に集中する山型カーネルは、日次イベント列に対する相対的な適合結果として解釈すべきである。これは、市場参加者の反応時間が厳密に 1 営業日後に集中することを識別したものではない。特に、形状パラメータの境界張り付き、ヘッセ行列の非正定値性、勾配の大きさ、標準誤差の不安定性がみられる場合には、カーネル形状の経済的解釈を控えめに行う必要がある。

第 3 に、本稿ではベースライン強度を一定とする一変量 Hawkes 過程を用いている。そのため、金融危機期やコロナショック期のように市場全体の不安定性が高まる局面では、共通ショックや時変的なベースライン強度の影響が、推定された自己励起性の一部として表れている可能性がある。本稿の推定結果は、過去の高ボラティリティ・イベントと将来のイベント発生強度との関連を示すものであり、因果的な誘発効果を直接識別するものではない。

第 4 に、本稿は一変量モデルに基づくため、日本市場と米国市場の間のショック伝播、あるいは RV と VI/VIX の間の相互励起性を直接扱っていない。したがって、市場間・指標間の影響方向を検証するには、多変量 Hawkes 過程への拡張が必要である。以上を踏まえると、本稿の実証結果は、高ボラティリティ・イベントの自己励起的な集積性と整合的な傾向を示唆する。ただし、その解釈は、比較対象としたカーネル関数の範囲での相対的適合、日次データの離散性、および一変量モデルの制約を考慮した探索的なものととどまる。

VII まとめと今後の課題

1 結果の要約

本稿では、日経平均株価 RV, S&P 500 RV, 日経平均 VI, CBOE VIX の4系列を対象に、共通営業日標本内の上位順位に基づいて高ボラティリティ・イベントを抽出し、水準超過幅をマークとするマーク付き一変量 Hawkes 過程を推定した。また、指数関数、指数関数の和、パワーロー指数減衰関数、QEXP 関数、ガンマ分布カーネル、Weibull 型カーネルを比較し、高ボラティリティ・イベント後の自己励起効果の時間構造を検討した。

推定結果からは、多くの系列・閾値において、ガンマ分布カーネルまたは Weibull 型カーネルのような山型カーネルが情報量規準上、比較対象内で相対的に良好な適合を示した。このことは、高ボラティリティ・イベントの影響がイベント直後に最大となって単調に減衰するだけでなく、一定の遅れを伴って強まる構造を含む可能性を示唆する結果である。とくに RV 系列では、数日程度の遅延を伴う山型カーネルとして解釈できるケースが多く、VI/VIX 系列では、上位 10% および 15% のイベントで 1 営業日付近への集中が強く推定される場合があった。

また、RV 系列では、水準超過幅を表すマーク効果が比較的明瞭に正で推定される傾向がみられた。これは、実際に観測された価格変動の大きさが、その後の高ボラティリティ・イベント発生強度と関連している可能性を示唆する。一方、VI/VIX 系列ではマーク効果が一貫して有意とはいえず、イベント規模よりも高水準の指数値が短期間に連続して現れる時刻構造の方が相対的に重要である可能性が示唆された。ただし、多くのケースで時間変換残差に対する K-S 検定が棄却されているため、本稿の結果は、比較対象としたカーネル関数の中での相対的な適合として解釈する必要がある。

2 本稿の限界

本稿の限界は、主に4点に整理できる。第1に、高ボラティリティ・イベントは各系列の標本内順位および上位比率に基づいて定義しているため、上位比率の選択がイベント数、マーク分布、経験的分岐比、カーネル形状に影響しうる。第2に、多くの推定結果で時間変換残差に対する K-S 検定が棄却されており、情報量規準上の最良モデルが点過程モデルとして十分な適合を示すとは限らない。第3に、一部の山型カーネルでは 1 営業日付近に極端に集中する解が得られており、これは日次営業日ベースのイベント時刻の離散性、境界解、局所解、または推定不安定性の影響を含む可能性がある。

第4に、本稿ではベースライン強度を一定とする一変量 Hawkes 過程を用いている。そのため、金融危機期やコロナショック期のような市場全体の不安定性の高まりを、時变的なベースライン強度として明示的に分離していない。また、各系列を個別にモデル化しているため、日本市場と米国市場のショック伝播、あるいは RV と VI/VIX の間の相互励起性を直接検証することはできない。したがって、本稿の推定結果は、因果的な誘発効果を識別したものではなく、採用したモデルとイベント定義のもとで、過去のイベントと将来の発生強度の関連を捉えたものとして理解する必要がある。

3 今後の課題

今後の課題として、まず、残差診断を改善できるモデルへの拡張が挙げられる。具体的には、より柔軟なカーネル関数、非パラメトリックまたはセミパラメトリックなカーネル推定、時変ベースライン強度を持つ Hawkes 過程を検討する必要がある。これにより、自己励起効果と市場全体に共通する外生

的ショックの影響をより明確に区別できる可能性がある。また、1 営業日付近に鋭く集中する推定結果については、初期値変更、パラメータ制約の調整、プロファイル尤度、ブートストラップなどを用いて、推定安定性を体系的に確認することが重要である。

さらに、多変量 Hawkes 過程への拡張により、日本市場と米国市場の間、および RV と VI/VIX の間の相互励起性を分析することが今後の重要な方向である。加えて、マーク効果については、現在の指数型の単調な効果に限らず、非線形性、飽和効果、マーク分布と発生時刻過程の依存構造を考慮する余地がある。最後に、分析期間、閾値、ボラティリティ指標、営業日単位の設定に対する頑健性を確認するため、サブサンプル分析や異なる閾値設定を用いた検証を進めることが望まれる。

参考文献

- Ait-Sahalia, Y., Cacho-Diaz, J. and Laeven, R. J. A. (2015). Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes. *Journal of Financial Economics*, 117(3), 585–606.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica*, 71(2), 579–625.
- Bacry, E., Mastromatteo, I. and Muzy, J.-F. (2015). Hawkes processes in finance. *Market Microstructure and Liquidity*, 1(1), 1550005.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 64(2), 253–280.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- Brown, E. N., Barbieri, R., Ventura, V., Kass, R. E. and Frank, L. M. (2002). The time-rescaling theorem and its application to neural spike train data analysis. *Neural Computation*, 14(2), 325–346.
- Cboe Global Markets (2026). *Cboe Volatility Index Methodology*, Version 6.0, last revised February 26, 2026. Available at: https://cdn.cboe.com/resources/indices/Volatility_Index_Methodology_Cboe_Volatility_Index.pdf (accessed May 27, 2026).
- Cox, D. R. and Hinkley, D. V. (1974). *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall.
- Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (2003). *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume I: Elementary Theory and Methods*. Springer.
- Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (2008). *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume II: General Theory and Structure*. Second edition. Springer.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Hawkes, A. G. (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58(1), 83–90.
- Hawkes, A. G. and Oakes, D. (1974). A cluster process representation of a self-exciting process. *Journal of Applied Probability*, 11(3), 493–503.
- Heber, G., Lunde, A., Shephard, N. and Sheppard, K. K. (2009). Oxford-Man Institute's Realized Library. Oxford-Man Institute, University of Oxford.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394–419.
- McNeil, A. J. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3–4), 271–300.
- Nikkei Inc. (2026). *Nikkei Stock Average Volatility Index*. Nikkei Indexes. Available at: <https://indexes.nikkei.co.jp/en/nkave/index/profile?idx=nk225vi> (accessed May 27, 2026).
- Ogata, Y. (1988). Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. *Journal of*

- the American Statistical Association*, 83(401), 9–27.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*, 3(1), 119–131.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464.
- Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52, 479–487.
- Wald, A. (1943). Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Transactions of the American Mathematical Society*, 54(3), 426–482.
- Whaley, R. E. (2000). The investor fear gauge. *Journal of Portfolio Management*, 26(3), 12–17.
- Wilks, S. S. (1938). The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, 9(1), 60–62.

付録 A 各カーネルの推定結果

表の読み方と記号

本付録では、本文で比較した 6 種類のカーネル関数について、日経平均株価 RV, S&P 500 RV, 日経平均 VI, CBOE VIX の各系列における上位 5%, 10%, 15% イベントを用いた推定結果を示す。モデルの定義, GPD マーク分布, 標準化マーク, および各カーネルの関数形は第 II 節第 4 項および第 II 節第 5 項に従う。

各セルは、1 行目に点推定値と標準誤差, 2 行目に 95% 信頼区間, 3 行目に p 値を示す。標準誤差または p 値が有効に得られない場合は — と表示する。また, $p=0.0000$ は丸め表示であり, 厳密に 0 であることを意味しない。信頼区間は原則として Wald 型信頼区間であり, ヘッセ行列に基づく標準誤差が不安定な場合にはプロファイル尤度信頼区間を用いる。推定値が 0.0000 と表示される場合は, 丸め表示または推定境界近傍の値である。

本文の記号と付録・実装上の記号が異なるものを次に整理する。ここで, γ , γ_{mark} はいずれも標準化マークの強度への効果を表す。QEXP カーネルの形状パラメータと Weibull 型カーネルの形状パラメータは, マーク効果を表す γ と混同しないよう, 付録ではそれぞれ q_{QEXP} , κ_W と表記する。

本文での記号	付録での記号	意 味
γ	$\gamma, \gamma_{\text{mark}}$	標準化マークの強度への効果
q	q_{QEXP}	QEXP カーネルの形状パラメータ
κ	κ_W	Weibull 型カーネルの形状パラメータ
a	k	ガンマ分布カーネルの形状パラメータ
p	p_{pow}	パワーロー指数減衰カーネルのべき指数

以下の各表では、表固有の推定上の注意がある場合のみ注を付す。境界到達や標準誤差の未計算がある場合, Wald 型の標準誤差, 信頼区間および p 値は参考値として扱う。

表 A.1 日経平均株価 RV：指数関数カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0123 (0.0025) [0.0074, 0.0172] $p=0.0000$	0.0217 (0.0038) [0.0142, 0.0291] $p=0.0000$	0.0227 (0.0046) [0.0138, 0.0317] $p=0.0000$
α	0.2035 (0.0442) [0.1170, 0.2901] $p=0.0000$	0.1493 (0.0253) [0.0997, 0.1988] $p=0.0000$	0.1108 (0.0169) [0.0777, 0.1439] $p=0.0000$
β	0.2933 (0.0525) [0.1904, 0.3961] $p=0.0000$	0.2027 (0.0313) [0.1413, 0.2642] $p=0.0000$	0.1376 (0.0194) [0.0996, 0.1756] $p=0.0000$
γ	0.3317 (0.1045) [0.1268, 0.5367] $p=0.0015$	0.2803 (0.0708) [0.1415, 0.4190] $p=0.0001$	0.2640 (0.0570) [0.1523, 0.3758] $p=0.0000$
ξ_{GPD}	0.0526 (0.1072) [-0.1575, 0.2627] $p=0.6238$	0.4378 (0.1120) [0.2184, 0.6573] $p=0.0001$	0.3474 (0.0758) [0.1988, 0.4959] $p=0.0000$
σ_{GPD}	12.1464 (1.7182) [8.7787, 15.5140] $p=0.0000$	5.6621 (0.7161) [4.2586, 7.0656] $p=0.0000$	5.5867 (0.5072) [4.5925, 6.5809] $p=0.0000$

表 A.2 日経平均株価 RV：指数関数とカーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0123 (—) [0.0064, 0.0179] $p=—$	0.0154 (0.0042) [0.0079, 0.0235] $p=0.0003$	0.0227 (—) [0.0074, 0.0326] $p=—$
α_1	0.2035 (—) [0.0509, 0.3077] $p=—$	0.1559 (0.0267) [0.1101, 0.2066] $p=0.0000$	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$
β_1	0.2933 (—) [0.0733, 1.1731] $p=—$	0.2384 (0.0390) [0.0596, 0.2762] $p=0.0000$	0.3381 (—) [0.0845, 1.3524] $p=—$
α_2	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$	0.0031 (0.0024) [0.0014, 0.0048] $p=0.1898$	0.1108 (—) [0.0277, 0.1482] $p=—$
β_2	0.0945 (—) [0.0236, 0.3779] $p=—$	0.0219 (0.0108) [0.0063, 0.0746] $p=0.0419$	0.1376 (—) [0.0344, 0.5505] $p=—$
γ	0.3317 (—) [0.1072, 0.5171] $p=—$	0.2883 (0.0695) [0.1416, 0.4069] $p=0.0000$	0.2640 (—) [0.1469, 0.3609] $p=—$
ξ_{GPD}	0.0526 (—) [-0.1184, 0.3051] $p=—$	0.4378 (0.1120) [0.2411, 0.6812] $p=0.0001$	0.3474 (—) [0.2122, 0.5084] $p=—$
σ_{GPD}	12.1464 (—) [9.1077, 15.8881] $p=—$	5.6621 (0.7159) [4.3928, 7.2124] $p=0.0000$	5.5867 (—) [4.6662, 6.6569] $p=—$

注：上位 5% および上位 15% では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。 α_1 または α_2 が 0.0000 の箇所は推定境界近傍を表す。

表 A.3 日経平均株価 RV：パワーロー指数減衰カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0123 (0.0025) [0.0080, 0.0179] $p=0.0000$	0.0217 (—) [0.0130, 0.0298] $p=—$	0.0219 (0.0042) [0.0122, 0.0323] $p=0.0000$
α	0.3354 (0.0740) [0.1312, 1.3416] $p=0.0000$	0.1492 (—) [0.1056, 0.5969] $p=—$	90.6145 (—) [22.6536, 362.4580] $p=—$
β	0.2909 (0.0276) [0.2040, 0.4126] $p=0.0000$	0.2027 (—) [0.1464, 0.2699] $p=—$	0.0730 (—) [0.0183, 0.1272] $p=—$
p	0.1305 (0.0388) [0.0326, 0.5219] $p=0.0008$	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$	2.0930 (—) [1.2704, 2.4738] $p=—$
c	45.7236 (0.0206) [11.4309, 182.8942] $p=0.0000$	45.7280 (—) [11.4320, 182.9121] $p=—$	24.2481 (—) [6.0620, 96.9924] $p=—$
γ	0.3313 (0.1174) [0.1070, 0.5172] $p=0.0048$	0.2803 (—) [0.1299, 0.4011] $p=—$	0.2687 (—) [0.1502, 0.3647] $p=—$
ξ_{GPD}	0.0532 (0.0505) [−0.1185, 0.3054] $p=0.2920$	0.4378 (—) [0.2411, 0.6812] $p=—$	0.3473 (—) [0.2122, 0.5084] $p=—$
σ_{GPD}	12.1378 (—) [9.1052, 15.8921] $p=—$	5.6622 (—) [4.3928, 7.2124] $p=—$	5.5881 (—) [4.6662, 6.6570] $p=—$

注：上位 10% では全パラメータ，上位 15% では μ を除くパラメータで標準誤差・ p 値が有効に得られていない。上位 10% のべき指数 p は下限近傍である。

表 A.4 日経平均株価 RV：QEXP カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0123 (—) [0.0080, 0.0179] $p=—$	0.0190 (0.0049) [0.0106, 0.0297] $p=0.0001$	0.0212 (0.0050) [0.0120, 0.0318] $p=0.0000$
α	0.2035 (—) [0.1313, 0.3077] $p=—$	0.1520 (0.0278) [0.1059, 0.2167] $p=0.0000$	0.1165 (0.0195) [0.0835, 0.1610] $p=0.0000$
β	0.2932 (—) [0.2060, 0.4535] $p=—$	0.2515 (0.0800) [0.1480, 0.4343] $p=0.0017$	0.1670 (0.0480) [0.1062, 0.2816] $p=0.0005$
q_{QEXP}	1.0000 (—) [1.0000, 1.2337] $p=—$	1.2043 (0.2054) [1.0000, 1.4603] $p=0.0000$	1.1416 (0.1684) [1.0000, 1.3919] $p=0.0000$
γ_{mark}	0.3318 (—) [0.1072, 0.5171] $p=—$	0.2890 (0.0710) [0.1311, 0.4099] $p=0.0001$	0.2716 (0.0573) [0.1538, 0.3687] $p=0.0000$
ξ_{GPD}	0.0526 (—) [−0.1184, 0.3051] $p=—$	0.4379 (0.1120) [0.2411, 0.6812] $p=0.0001$	0.3473 (0.0758) [0.2122, 0.5084] $p=0.0000$
σ_{GPD}	12.1464 (—) [9.1077, 15.8857] $p=—$	5.6617 (0.7159) [4.3928, 7.2124] $p=0.0000$	5.5867 (0.5072) [4.6662, 6.6569] $p=0.0000$

注：上位 5% では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。 q_{QEXP} の信頼区間下限が 1.0000 の箇所は探索範囲の下側境界に到達している。

表 A.5 日経平均株価 RV：ガンマ分布カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0150 (0.0026)	0.0253 (0.0042)	0.0285 (0.0051)
	[0.0104, 0.0599]	[0.0172, 0.0335]	[0.0195, 0.1139]
	$p=0.0000$	$p=0.0000$	$p=0.0000$
α	0.6658 (0.0790)	0.7085 (0.0623)	0.7776 (0.0548)
	[0.1665, 0.8316]	[0.5863, 0.8307]	[0.1944, 0.8881]
	$p=0.0000$	$p=0.0000$	$p=0.0000$
β	3.6196 (1.0876)	0.7967 (0.2814)	0.4343 (0.1244)
	[1.4964, 6.6799]	[0.2452, 1.3482]	[0.2497, 0.8091]
	$p=0.0009$	$p=0.0046$	$p=0.0005$
k	5.7236 (1.3192)	2.3903 (0.4732)	1.8944 (0.2799)
	[3.1090, 22.8942]	[1.4629, 3.3177]	[1.4284, 2.5876]
	$p=0.0000$	$p=0.0000$	$p=0.0000$
γ	0.2354 (0.1008)	0.2485 (0.0691)	0.2249 (0.0568)
	[0.0227, 0.4149]	[0.1130, 0.3840]	[0.1091, 0.3220]
	$p=0.0196$	$p=0.0003$	$p=0.0001$
ξ_{GPD}	0.0526 (0.1069)	0.4378 (0.1120)	0.3474 (0.0758)
	[-0.1184, 0.3051]	[0.2184, 0.6573]	[0.2122, 0.5084]
	$p=0.6227$	$p=0.0001$	$p=0.0000$
σ_{GPD}	12.1464 (1.7158)	5.6621 (0.7160)	5.5867 (0.5072)
	[9.1077, 15.8881]	[4.2588, 7.0654]	[4.6662, 6.6569]
	$p=0.0000$	$p=0.0000$	$p=0.0000$

注：上位 5% および上位 15% の信頼区間はプロファイル尤度信頼区間である。

表 A.6 日経平均株価 RV：Weibull カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0150 (0.0026)	0.0243 (0.0039)	0.0273 (0.0049)
	[0.0099, 0.0201]	[0.0167, 0.0320]	[0.0177, 0.0370]
	$p=0.0000$	$p=0.0000$	$p=0.0000$
α	0.3301 (0.0833)	0.1387 (0.0290)	0.1058 (0.0193)
	[0.1668, 0.4934]	[0.0820, 0.1955]	[0.0680, 0.1436]
	$p=0.0001$	$p=0.0000$	$p=0.0000$
β	0.4969 (0.1110)	0.1939 (0.0383)	0.1350 (0.0237)
	[0.2794, 0.7144]	[0.1189, 0.2688]	[0.0887, 0.1814]
	$p=0.0000$	$p=0.0000$	$p=0.0000$
κ_W	2.5362 (0.2915)	1.5321 (0.1449)	1.3822 (0.1236)
	[1.9649, 3.1074]	[1.2481, 1.8162]	[1.1401, 1.6244]
	$p=0.0000$	$p=0.0000$	$p=0.0000$
γ_{mark}	0.2458 (0.1000)	0.2589 (0.0696)	0.2330 (0.0573)
	[0.0497, 0.4418]	[0.1224, 0.3954]	[0.1208, 0.3453]
	$p=0.0140$	$p=0.0002$	$p=0.0000$
ξ_{GPD}	0.0526 (0.1071)	0.4378 (0.1119)	0.3474 (0.0758)
	[-0.1574, 0.2626]	[0.2184, 0.6573]	[0.1988, 0.4959]
	$p=0.6236$	$p=0.0001$	$p=0.0000$
σ_{GPD}	12.1464 (1.7183)	5.6621 (0.7160)	5.5867 (0.5072)
	[8.7786, 15.5141]	[4.2588, 7.0654]	[4.5925, 6.5808]
	$p=0.0000$	$p=0.0000$	$p=0.0000$

表 A.7 S&P 500 RV：指数関数カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0087 (0.0022) [0.0044, 0.0131] $p=0.0001$	0.0129 (0.0030) [0.0069, 0.0189] $p=0.0000$	0.0176 (0.0040) [0.0097, 0.0255] $p=0.0000$
α	0.1599 (0.0356) [0.0902, 0.2296] $p=0.0000$	0.1336 (0.0206) [0.0933, 0.1740] $p=0.0000$	0.1382 (0.0192) [0.1007, 0.1758] $p=0.0000$
β	0.2040 (0.0410) [0.1237, 0.2843] $p=0.0000$	0.1578 (0.0218) [0.1151, 0.2005] $p=0.0000$	0.1592 (0.0209) [0.1183, 0.2002] $p=0.0000$
γ	0.2665 (0.1025) [0.0657, 0.4673] $p=0.0093$	0.1908 (0.0741) [0.0455, 0.3361] $p=0.0101$	0.1390 (0.0626) [0.0163, 0.2616] $p=0.0264$
ξ_{GPD}	0.2332 (0.1247) [-0.0112, 0.4776] $p=0.0614$	0.3359 (0.0919) [0.1558, 0.5161] $p=0.0003$	0.2745 (0.0677) [0.1418, 0.4071] $p=0.0001$
σ_{GPD}	10.6645 (1.6393) [7.4515, 13.8775] $p=0.0000$	7.2964 (0.8073) [5.7141, 8.8786] $p=0.0000$	7.1921 (0.6106) [5.9953, 8.3890] $p=0.0000$

表 A.8 S&P 500 RV：指数関数とカーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0070 (0.0022) [0.0033, 0.0120] $p=0.0015$	0.0129 (—) [0.0052, 0.0197] $p=—$	0.0176 (—) [0.0055, 0.0265] $p=—$
α_1	0.1803 (0.0419) [0.0665, 0.2788] $p=0.0000$	0.0109 (—) [0.0027, 0.0434] $p=—$	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$
β_1	0.2728 (0.0652) [0.0682, 0.3167] $p=0.0000$	0.1584 (—) [0.0396, 0.6334] $p=—$	0.2636 (—) [0.0659, 1.0544] $p=—$
α_2	0.0055 (0.0066) [0.0017, 0.0092] $p=0.4090$	0.1211 (—) [0.0303, 0.1795] $p=—$	0.1382 (—) [0.0346, 0.1788] $p=—$
β_2	0.0362 (0.0261) [0.0091, 0.1450] $p=0.1651$	0.1556 (—) [0.0389, 0.6222] $p=—$	0.1592 (—) [0.0398, 0.6369] $p=—$
γ	0.2880 (0.1013) [0.0710, 0.4686] $p=0.0045$	0.1922 (—) [0.0293, 0.3168] $p=—$	0.1390 (—) [0.0072, 0.2435] $p=—$
ξ_{GPD}	0.2332 (0.1247) [0.0235, 0.5187] $p=0.0614$	0.3367 (—) [0.1774, 0.5380] $p=—$	0.2745 (—) [0.1564, 0.4200] $p=—$
σ_{GPD}	10.6645 (1.6394) [7.8273, 14.3268] $p=0.0000$	7.2816 (—) [5.8457, 9.0289] $p=—$	7.1921 (—) [6.0741, 8.4739] $p=—$

注：上位 10% および上位 15% では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。上位 15% の $\alpha_1=0.0000$ は推定境界近傍を表す。

表 A.9 S&P 500 RV : パワーロー指数減衰カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0073 (0.0022) [0.0018, 0.0292] $p=0.0009$	0.0129 (—) [0.0077, 0.0197] $p=—$	0.0175 (0.0039) [0.0044, 0.0701] $p=0.0000$
α	474.5719 (0.0329) [118.6430, 1898.2876] $p=0.0000$	0.1336 (—) [0.0980, 0.5343] $p=—$	0.6032 (0.0135) [0.1508, 2.4127] $p=0.0000$
β	0.0006 (0.0123) [0.0001, 0.0022] $p=0.9646$	0.1577 (—) [0.0830, 0.1991] $p=—$	0.1520 (0.0069) [0.0679, 0.2021] $p=0.0000$
p_{pow}	3.3559 (0.0210) [1.2027, 3.6396] $p=0.0000$	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$	0.3850 (0.0085) [0.0962, 1.5399] $p=0.0000$
c	10.4003 (0.0352) [2.6001, 41.6011] $p=0.0000$	45.7356 (—) [11.4339, 182.9426] $p=—$	45.7019 (—) [11.4255, 182.8077] $p=—$
γ	0.2876 (0.0045) [0.0678, 0.4676] $p=0.0000$	0.1908 (—) [0.0293, 0.3168] $p=—$	0.1391 (0.0220) [0.0070, 0.2437] $p=0.0000$
ξ_{GPD}	0.2332 (0.0538) [0.0235, 0.5187] $p=0.0000$	0.3359 (—) [0.1776, 0.5377] $p=—$	0.2743 (—) [0.1563, 0.4201] $p=—$
σ_{GPD}	10.6643 (—) [7.8273, 14.3268] $p=—$	7.2964 (—) [5.8466, 9.0262] $p=—$	7.1958 (—) [6.0734, 8.4750] $p=—$

注：上位 10% では全パラメータで標準誤差・ p 値が有効に得られていない。上位 5% および上位 15% にも一部未計算の標準誤差・ p 値がある。上位 10% の p_{pow} は下限近傍である。

表 A.10 S&P 500 RV : QEXP カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0075 (0.0023) [0.0037, 0.0127] $p=0.0009$	0.0129 (—) [0.0077, 0.0197] $p=—$	0.0176 (0.0043) [0.0101, 0.0265] $p=0.0000$
α	0.1778 (0.0420) [0.1110, 0.2810] $p=0.0000$	0.1336 (—) [0.0980, 0.1804] $p=—$	0.1382 (0.0222) [0.1049, 0.1891] $p=0.0000$
β	0.2958 (0.0966) [0.1520, 0.5536] $p=0.0022$	0.1577 (—) [0.1197, 0.2489] $p=—$	0.1593 (0.0450) [0.1229, 0.2714] $p=0.0004$
q_{QEXP}	1.2514 (0.1445) [1.0000, 1.4844] $p=0.0000$	1.0000 (—) [1.0000, 1.2512] $p=—$	1.0007 (0.1785) [1.0000, 1.2850] $p=0.0000$
γ_{mark}	0.2836 (0.1023) [0.0634, 0.4651] $p=0.0055$	0.1908 (—) [0.0293, 0.3168] $p=—$	0.1390 (0.0629) [0.0072, 0.2442] $p=0.0270$
ξ_{GPD}	0.2332 (0.1247) [0.0235, 0.5187] $p=0.0615$	0.3359 (—) [0.1776, 0.5377] $p=—$	0.2745 (0.0677) [0.1564, 0.4200] $p=0.0001$
σ_{GPD}	10.6646 (1.6394) [7.8273, 14.3268] $p=0.0000$	7.2964 (—) [5.8466, 9.0261] $p=—$	7.1921 (0.6106) [6.0741, 8.4739] $p=0.0000$

注：上位 10% では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。 q_{QEXP} の信頼区間下限が 1.0000 の箇所は探索範囲の下側境界に到達している。

表 A.11 S&P 500 RV：ガンマ分布カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0109 (0.0024) [0.0063, 0.0155] $p=0.0000$	0.0149 (0.0034) [0.0083, 0.0215] $p=0.0000$	0.0503 (0.0046) [0.0414, 0.0592] $p=0.0000$
α	0.7485 (0.0850) [0.5820, 0.9151] $p=0.0000$	0.8328 (0.0652) [0.7050, 0.9606] $p=0.0000$	0.6412 (0.0430) [0.5570, 0.7255] $p=0.0000$
β	0.9391 (0.2863) [0.3779, 1.5003] $p=0.0010$	0.3698 (0.0986) [0.1765, 0.5631] $p=0.0002$	5026.6992 (471.6218) [4102.3375, 5951.0609] $p=0.0000$
k	2.5998 (0.5450) [1.5317, 3.6680] $p=0.0000$	1.7699 (0.2678) [1.2452, 2.2947] $p=0.0000$	5027.2165 (471.6284) [4102.8418, 5951.5912] $p=0.0000$
γ	0.2349 (0.0989) [0.0410, 0.4287] $p=0.0176$	0.1584 (0.0748) [0.0118, 0.3049] $p=0.0342$	0.1646 (0.0511) [0.0644, 0.2647] $p=0.0013$
ξ_{GPD}	0.2332 (0.1247) [-0.0112, 0.4777] $p=0.0615$	0.3359 (0.0919) [0.1558, 0.5161] $p=0.0003$	0.2746 (0.0677) [0.1419, 0.4073] $p=0.0001$
σ_{GPD}	10.6645 (1.6395) [7.4512, 13.8778] $p=0.0000$	7.2964 (0.8073) [5.7142, 8.8786] $p=0.0000$	7.1902 (0.6105) [5.9937, 8.3866] $p=0.0000$

表 A.12 S&P 500 RV：Weibull カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0109 (0.0023) [0.0063, 0.0155] $p=0.0000$	0.0142 (0.0032) [0.0079, 0.0206] $p=0.0000$	0.0369 (0.0047) [0.0277, 0.0461] $p=0.0000$
α	0.1727 (0.0436) [0.0873, 0.2581] $p=0.0001$	0.1101 (0.0216) [0.0678, 0.1524] $p=0.0000$	0.3284 (0.0791) [0.1734, 0.4834] $p=0.0000$
β	0.2309 (0.0530) [0.1270, 0.3349] $p=0.0000$	0.1313 (0.0244) [0.0834, 0.1792] $p=0.0000$	0.4450 (0.1085) [0.2323, 0.6578] $p=0.0000$
κ_W	1.7123 (0.2117) [1.2974, 2.1271] $p=0.0000$	1.3391 (0.1181) [1.1076, 1.5706] $p=0.0000$	2.6019 (0.2780) [2.0570, 3.1468] $p=0.0000$
γ_{mark}	0.2363 (0.0992) [0.0419, 0.4306] $p=0.0172$	0.1634 (0.0748) [0.0167, 0.3100] $p=0.0290$	0.1219 (0.0572) [0.0097, 0.2341] $p=0.0332$
ξ_{GPD}	0.2332 (0.1247) [-0.0112, 0.4776] $p=0.0614$	0.3359 (0.0920) [0.1557, 0.5162] $p=0.0003$	0.2745 (0.0677) [0.1418, 0.4072] $p=0.0001$
σ_{GPD}	10.6645 (1.6392) [7.4517, 13.8773] $p=0.0000$	7.2964 (0.8074) [5.7139, 8.8789] $p=0.0000$	7.1921 (0.6107) [5.9952, 8.3890] $p=0.0000$

表 A.13 日経平均 VI：指数関数カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0043 (0.0015) [0.0015, 0.0072] $p=0.0028$	0.0077 (0.0021) [0.0036, 0.0118] $p=0.0003$	0.0109 (0.0027) [0.0055, 0.0162] $p=0.0001$
α	0.2582 (0.0475) [0.1650, 0.3514] $p=0.0000$	0.2225 (0.0332) [0.1575, 0.2876] $p=0.0000$	0.2007 (0.0251) [0.1514, 0.2500] $p=0.0000$
β	0.2881 (0.0442) [0.2015, 0.3747] $p=0.0000$	0.2456 (0.0326) [0.1818, 0.3094] $p=0.0000$	0.2197 (0.0247) [0.1712, 0.2682] $p=0.0000$
γ	0.1814 (0.0965) [-0.0078, 0.3706] $p=0.0602$	0.1778 (0.0672) [0.0462, 0.3095] $p=0.0081$	0.1632 (0.0541) [0.0571, 0.2693] $p=0.0026$
ξ_{GPD}	0.1678 (0.1178) [-0.0631, 0.3987] $p=0.1544$	0.0024 (0.0638) [-0.1227, 0.1275] $p=0.9702$	0.0755 (0.0612) [-0.0444, 0.1954] $p=0.2171$
σ_{GPD}	5.1877 (0.7725) [3.6737, 6.7018] $p=0.0000$	6.8614 (0.6271) [5.6323, 8.0906] $p=0.0000$	5.8813 (0.4766) [4.9471, 6.8155] $p=0.0000$

表 A.14 日経平均 VI：指数関数カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0043 (—) [0.0021, 0.0078] $p=—$	0.0077 (0.0021) [0.0020, 0.0126] $p=0.0003$	0.0109 (—) [0.0063, 0.0171] $p=—$
α_1	0.2582 (—) [0.0645, 0.3669] $p=—$	0.1397 (2.2816) [0.0349, 0.2970] $p=0.9512$	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$
β_1	0.2881 (—) [0.0720, 1.1523] $p=—$	0.2456 (0.0587) [0.0614, 0.9824] $p=0.0000$	0.1183 (—) [0.0296, 0.4731] $p=—$
α_2	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$	0.0829 (2.2808) [0.0207, 0.2970] $p=0.9710$	0.2007 (—) [0.0502, 0.2558] $p=—$
β_2	0.2696 (—) [0.0674, 1.0786] $p=—$	0.2456 (0.0885) [0.0614, 0.9824] $p=0.0055$	0.2197 (—) [0.0549, 0.8788] $p=—$
γ	0.1814 (—) [-0.0243, 0.3532] $p=—$	0.1778 (0.0672) [0.0414, 0.2941] $p=0.0081$	0.1632 (—) [0.0569, 0.2583] $p=—$
ξ_{GPD}	0.1678 (—) [-0.0307, 0.4378] $p=—$	0.0024 (0.0643) [-0.1057, 0.1455] $p=0.9704$	0.0755 (—) [-0.0270, 0.2099] $p=—$
σ_{GPD}	5.1877 (—) [3.8467, 6.9054] $p=—$	6.8614 (0.6287) [5.7202, 8.1812] $p=0.0000$	5.8813 (—) [4.9983, 6.8666] $p=—$

注：上位 5% および上位 15% では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。 α_1 または α_2 が 0.0000 の箇所は推定境界近傍を表す。

表 A.15 日経平均 VI：パワーロー指数減衰カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0043 (—)	0.0077 (—)	0.0109 (—)
	[0.0021, 0.0078]	[0.0042, 0.0125]	[0.0063, 0.0171]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
α	0.2581 (—)	0.2225 (—)	0.2007 (—)
	[0.1783, 0.0326]	[0.1659, 0.8900]	[0.1566, 0.8027]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
β	0.2880 (—)	0.2456 (—)	0.2197 (—)
	[0.2102, 0.3845]	[0.1880, 0.3159]	[0.1744, 0.2720]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
p_{pow}	0.0000 (—)	0.0000 (—)	0.0000 (—)
	[0.0000, 0.0000]	[0.0000, 0.0000]	[0.0000, 0.0000]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
c	45.7189 (—)	45.7328 (—)	45.7340 (—)
	[11.4297, 182.8758]	[11.4332, 182.9312]	[11.4335, 182.9361]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
γ	0.1814 (—)	0.1779 (—)	0.1632 (—)
	[−0.0243, 0.3532]	[0.0414, 0.2941]	[0.0569, 0.2583]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
ξ_{GPD}	0.1678 (—)	0.0024 (—)	0.0755 (—)
	[−0.0307, 0.4378]	[−0.1057, 0.1455]	[−0.0270, 0.2099]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
σ_{GPD}	5.1878 (—)	6.8614 (—)	5.8814 (—)
	[3.8467, 6.9054]	[5.7202, 8.1812]	[4.9983, 6.8666]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$

注：3つの閾値水準すべてで標準誤差・ p 値が有効に得られていない。 p_{pow} は下限近傍である。

表 A.16 日経平均 VI：QEXP カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0043 (—)	0.0077 (—)	0.0109 (—)
	[0.0021, 0.0078]	[0.0042, 0.0125]	[0.0063, 0.0171]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
α	0.2581 (—)	0.2225 (—)	0.2007 (—)
	[0.1783, 0.3669]	[0.1659, 0.2970]	[0.1566, 0.2558]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
β	0.2880 (—)	0.2456 (—)	0.2197 (—)
	[0.2112, 0.3967]	[0.1895, 0.3407]	[0.1759, 0.2844]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
q_{QEXP}	1.0000 (—)	1.0000 (—)	1.0000 (—)
	[1.0000, 1.1497]	[1.0000, 1.1778]	[1.0000, 1.1260]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
γ_{mark}	0.1814 (—)	0.1778 (—)	0.1632 (—)
	[−0.0243, 0.3532]	[0.0414, 0.2941]	[0.0569, 0.2583]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
ξ_{GPD}	0.1678 (—)	0.0024 (—)	0.0755 (—)
	[−0.0307, 0.4378]	[−0.1057, 0.1455]	[0.0755, 0.0755]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$
σ_{GPD}	5.1878 (—)	6.8614 (—)	5.8813 (—)
	[3.8467, 6.9054]	[5.7202, 8.1812]	[5.8813, 5.8813]
	$p=—$	$p=—$	$p=—$

注：3つの閾値水準すべてで標準誤差・ p 値が有効に得られていない。 q_{QEXP} および上位 15% の GPD パラメータでは境界到達に注意を要する。

表 A.17 日経平均 VI : ガンマ分布カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0046 (0.0015) [0.0016, 0.0076] $p=0.0025$	0.0154 (0.0026) [0.0104, 0.0204] $p=0.0000$	0.0230 (0.0031) [0.0169, 0.0292] $p=0.0000$
α	0.8983 (0.0891) [0.7237, 1.0729] $p=0.0000$	0.8375 (0.0601) [0.7197, 0.9552] $p=0.0000$	0.8395 (0.0490) [0.7435, 0.9356] $p=0.0000$
β	1.1689 (0.3215) [0.5388, 1.7990] $p=0.0003$	3656.8023 (476.6573) [2722.5712, 4591.0334] $p=0.0000$	34732.7286 (—) [34731.6565, 34733.8309] $p=—$
k	2.9431 (0.5694) [1.8271, 4.0591] $p=0.0000$	3657.0317 (476.6678) [2722.7800, 4591.2834] $p=0.0000$	34732.7373 (—) [34731.6652, 34733.8396] $p=—$
γ	0.1354 (0.0972) [−0.0552, 0.3259] $p=0.1638$	0.1317 (0.0617) [0.0108, 0.2525] $p=0.0327$	0.1210 (0.0507) [0.0217, 0.2203] $p=0.0169$
ξ_{GPD}	0.1678 (0.1177) [−0.0629, 0.3985] $p=0.1540$	0.0024 (0.0636) [−0.1222, 0.1270] $p=0.9701$	0.0755 (0.0611) [−0.0443, 0.1953] $p=0.2168$
σ_{GPD}	5.1877 (0.7723) [3.6741, 6.7014] $p=0.0000$	6.8614 (0.6257) [5.6350, 8.0879] $p=0.0000$	5.8813 (0.4764) [4.9475, 6.8151] $p=0.0000$

注：上位 15% の β および k では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。

表 A.18 日経平均 VI : Weibull カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0046 (0.0015) [0.0016, 0.0075] $p=0.0026$	0.0091 (0.0023) [0.0046, 0.0136] $p=0.0001$	0.0193 (0.0034) [0.0127, 0.0259] $p=0.0000$
α	0.2159 (0.0538) [0.1103, 0.3214] $p=0.0001$	0.2310 (0.0509) [0.1312, 0.3308] $p=0.0000$	0.5405 (0.1439) [0.2585, 0.8224] $p=0.0002$
β	0.2404 (0.0552) [0.1321, 0.3486] $p=0.0000$	0.2563 (0.0546) [0.1493, 0.3634] $p=0.0000$	0.6238 (0.1667) [0.2970, 0.9506] $p=0.0002$
κ_{W}	1.7805 (0.2045) [1.3797, 2.1813] $p=0.0000$	1.8220 (0.1790) [1.4711, 2.1729] $p=0.0000$	2.8492 (0.2293) [2.3998, 3.2987] $p=0.0000$
γ_{mark}	0.1446 (0.0972) [−0.0460, 0.3352] $p=0.1369$	0.1223 (0.0675) [−0.0101, 0.2547] $p=0.0702$	0.1018 (0.0533) [−0.0026, 0.2063] $p=0.0561$
ξ_{GPD}	0.1678 (0.1177) [−0.0629, 0.3985] $p=0.1540$	0.0024 (0.0641) [−0.1233, 0.1280] $p=0.9703$	0.0755 (0.0612) [−0.0444, 0.1954] $p=0.2171$
σ_{GPD}	5.1877 (0.7723) [3.6741, 6.7013] $p=0.0000$	6.8614 (0.6282) [5.6302, 8.0927] $p=0.0000$	5.8813 (0.4766) [4.9471, 6.8155] $p=0.0000$

表 A.19 CBOE VIX：指数関数カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0028 (0.0012) [0.0004, 0.0051] $p=0.0203$	0.0045 (0.0015) [0.0014, 0.0075] $p=0.0039$	0.0084 (0.0023) [0.0039, 0.0128] $p=0.0002$
α	0.1865 (0.0427) [0.1028, 0.2703] $p=0.0000$	0.2052 (0.0332) [0.1401, 0.2703] $p=0.0000$	0.1896 (0.0268) [0.1371, 0.2421] $p=0.0000$
β	0.1989 (0.0418) [0.1170, 0.2807] $p=0.0000$	0.2153 (0.0319) [0.1528, 0.2778] $p=0.0000$	0.1996 (0.0263) [0.1480, 0.2511] $p=0.0000$
γ	0.1105 (0.1001) [-0.0857, 0.3068] $p=0.2696$	0.0621 (0.0707) [-0.0766, 0.2007] $p=0.3804$	0.0599 (0.0573) [-0.0525, 0.1722] $p=0.2963$
ξ_{GPD}	0.2066 (0.1209) [-0.0304, 0.4435] $p=0.0876$	0.0991 (0.0705) [-0.0390, 0.2372] $p=0.1595$	0.0572 (0.0531) [-0.0468, 0.1613] $p=0.2809$
σ_{GPD}	7.2391 (1.0933) [5.0962, 9.3819] $p=0.0000$	7.9200 (0.7594) [6.4316, 9.4085] $p=0.0000$	8.2960 (0.6235) [7.0739, 9.5181] $p=0.0000$

表 A.20 CBOE VIX：指数関数とカーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0021 (0.0010) [0.0006, 0.0048] $p=0.0452$	0.0045 (—) [0.0021, 0.0082] $p=—$	0.0084 (—) [0.0047, 0.0136] $p=—$
α_1	0.2053 (0.0457) [0.0513, 0.2959] $p=0.0000$	0.0331 (—) [0.0083, 0.1322] $p=—$	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$
β_1	0.2314 (0.0490) [0.0579, 0.9258] $p=0.0000$	0.2153 (—) [0.0538, 0.8611] $p=—$	0.2466 (—) [0.0616, 0.9863] $p=—$
α_2	0.0016 (0.0027) [0.0004, 0.0064] $p=0.5494$	0.1721 (—) [0.0430, 0.2803] $p=—$	0.1896 (—) [0.0474, 0.2485] $p=—$
β_2	0.0244 (0.0210) [0.0061, 0.0976] $p=0.2454$	0.2153 (—) [0.0538, 0.8611] $p=—$	0.1996 (—) [0.0499, 0.7982] $p=—$
γ	0.1259 (0.0997) [-0.0832, 0.3050] $p=0.2065$	0.0621 (—) [-0.0844, 0.1846] $p=—$	0.0598 (—) [-0.0538, 0.1593] $p=—$
ξ_{GPD}	0.2066 (0.1210) [0.0032, 0.4841] $p=0.0877$	0.0991 (—) [-0.0194, 0.2555] $p=—$	0.0572 (—) [-0.0318, 0.1720] $p=—$
σ_{GPD}	7.2390 (1.0935) [5.3420, 9.6812] $p=0.0000$	7.9200 (—) [6.5425, 9.5309] $p=—$	8.2960 (—) [7.1481, 9.5932] $p=—$

注：上位 10% および上位 15% では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。 α_1 または α_2 が 0.0000 の箇所は推定境界近傍を表す。

表 A.21 CBOE VIX：パワーロー指数減衰カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0028 (0.0012) [0.0007, 0.0058] $p=0.0196$	0.0045 (—) [0.0021, 0.0082] $p=—$	0.0084 (0.0023) [0.0046, 0.0136] $p=0.0002$
α	0.9401 (—) [0.2350, 3.7605] $p=—$	0.2051 (—) [0.1490, 0.8206] $p=—$	0.1979 (0.0092) [0.1430, 0.7918] $p=0.0000$
β	0.1904 (0.0273) [0.1277, 0.2913] $p=0.0000$	0.2152 (—) [0.1596, 0.2849] $p=—$	0.1991 (—) [0.0967, 0.2506] $p=—$
p_{pow}	0.4232 (0.0476) [0.1058, 1.6927] $p=0.0000$	0.0000 (—) [0.0000, 0.0000] $p=—$	0.0115 (—) [0.0029, 0.0460] $p=—$
c	45.6961 (—) [11.4240, 182.7844] $p=—$	45.7448 (—) [11.4362, 182.9792] $p=—$	45.7361 (0.0264) [11.4340, 182.9443] $p=0.0000$
γ	0.1108 (—) [−0.1001, 0.2902] $p=—$	0.0621 (—) [−0.0844, 0.1846] $p=—$	0.0607 (0.0145) [−0.0538, 0.1595] $p=0.0000$
ξ_{GPD}	0.2066 (0.0884) [0.0029, 0.4846] $p=0.0195$	0.0991 (—) [−0.0194, 0.2555] $p=—$	0.0559 (—) [−0.0319, 0.1721] $p=—$
σ_{GPD}	7.2390 (—) [5.3392, 9.6856] $p=—$	7.9200 (—) [6.5425, 9.5309] $p=—$	8.3229 (—) [7.1478, 9.5955] $p=—$

注：上位 10% では全パラメータで標準誤差・ p 値が有効に得られていない。上位 5% および上位 15% にも一部未計算の標準誤差・ p 値がある。 p_{pow} が 0.0000 の箇所は推定境界近傍を表す。

表 A.22 CBOE VIX：QEXP カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0023 (0.0012) [0.0007, 0.0055] $p=0.0471$	0.0045 (—) [0.0021, 0.0082] $p=—$	0.0084 (—) [0.0047, 0.0136] $p=—$
α	0.1954 (0.0463) [0.1213, 0.3078] $p=0.0000$	0.2051 (—) [0.1490, 0.2803] $p=—$	0.1896 (—) [0.1430, 0.2485] $p=—$
β	0.2517 (0.0826) [0.1342, 0.4589] $p=0.0023$	0.2152 (—) [0.1608, 0.2966] $p=—$	0.1995 (—) [0.1533, 0.2673] $p=—$
q_{QEXP}	1.1792 (0.1484) [1.0000, 1.3938] $p=0.0000$	1.0000 (—) [1.0000, 1.1522] $p=—$	1.0000 (—) [1.0000, 1.1598] $p=—$
γ_{mark}	0.1273 (0.1022) [−0.0877, 0.3103] $p=0.2129$	0.0621 (—) [−0.0844, 0.1846] $p=—$	0.0599 (—) [−0.0593, 0.1657] $p=—$
ξ_{GPD}	0.2065 (0.1210) [0.0032, 0.4841] $p=0.0877$	0.0991 (—) [−0.0194, 0.2555] $p=—$	0.0572 (—) [0.0572, 0.0572] $p=—$
σ_{GPD}	7.2392 (1.0934) [5.3420, 9.6812] $p=0.0000$	7.9201 (—) [6.5425, 9.5309] $p=—$	8.2960 (—) [8.2960, 8.2960] $p=—$

注：上位 10% および上位 15% では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。上位 15% の GPD パラメータおよび q_{QEXP} では境界到達に注意を要する。

表 A.23 CBOE VIX：ガンマ分布カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0038 (0.0013) [0.0017, 0.0070] $p=0.0049$	0.0090 (0.0020) [0.0051, 0.0128] $p=0.0000$	0.0150 (0.0025) [0.0100, 0.0199] $p=0.0000$
α	0.9223 (0.0893) [0.7580, 1.0000] $p=0.0000$	0.9077 (0.0624) [0.7854, 1.0299] $p=0.0000$	0.9009 (0.0508) [0.8014, 1.0005] $p=0.0000$
β	1.5276 (0.4816) [0.6513, 2.6041] $p=0.0015$	7927.2667 (—) [—, —] $p=—$	5719.4204 (—) [5653.5583, 5719.6140] $p=—$
k	3.4617 (0.7302) [2.0874, 13.8470] $p=0.0000$	7930.1436 (—) [—, —] $p=—$	5719.6463 (—) [5651.6476, 5719.8398] $p=—$
γ	0.0704 (0.0943) [−0.1252, 0.2416] $p=0.4558$	0.0698 (0.0628) [−0.0532, 0.1929] $p=0.2658$	0.0756 (0.0512) [−0.0248, 0.1760] $p=0.1401$
ξ_{GPD}	0.2066 (0.1209) [0.0032, 0.4841] $p=0.0877$	0.0991 (0.0705) [−0.0390, 0.2372] $p=0.1595$	0.0572 (0.0531) [−0.0468, 0.1613] $p=0.2811$
σ_{GPD}	7.2391 (1.0935) [5.3420, 9.6812] $p=0.0000$	7.9200 (0.7594) [6.4316, 9.4085] $p=0.0000$	8.2960 (0.6237) [7.0737, 9.5183] $p=0.0000$

注：上位 10% および上位 15% の β , k では標準誤差・ p 値が有効に得られていない。上位 15% の β , k の信頼区間はプロファイル尤度信頼区間である。

表 A.24 CBOE VIX：Weibull カーネルの推定結果

パラメータ	上位 5%	上位 10%	上位 15%
μ	0.0038 (0.0013) [0.0012, 0.0064] $p=0.0047$	0.0058 (0.0017) [0.0023, 0.0092] $p=0.0010$	0.0149 (0.0025) [0.0100, 0.0199] $p=0.0000$
α	0.2292 (0.0668) [0.0983, 0.3601] $p=0.0006$	0.3199 (0.0815) [0.1603, 0.4796] $p=0.0001$	270.0173 (26.2958) [218.4786, 321.5561] $p=0.0000$
β	0.2485 (0.0684) [0.1145, 0.3825] $p=0.0003$	0.3398 (0.0844) [0.1744, 0.5052] $p=0.0001$	299.7098 (23.8146) [253.0341, 346.3855] $p=0.0000$
κ_W	2.0061 (0.2430) [1.5299, 2.4824] $p=0.0000$	2.3643 (0.2284) [1.9168, 2.8119] $p=0.0000$	300.0000 (16.8521) [266.9705, 333.0295] $p=0.0000$
γ_{mark}	0.0724 (0.0946) [−0.1130, 0.2577] $p=0.4442$	0.0399 (0.0671) [−0.0916, 0.1713] $p=0.5521$	0.0758 (0.0511) [−0.0243, 0.1759] $p=0.1375$
ξ_{GPD}	0.2066 (0.1210) [−0.0306, 0.4437] $p=0.0878$	0.0991 (0.0705) [−0.0390, 0.2372] $p=0.1595$	0.0572 (0.0531) [−0.0468, 0.1613] $p=0.2811$
σ_{GPD}	7.2391 (1.0937) [5.0955, 9.3826] $p=0.0000$	7.9200 (0.7594) [6.4316, 9.4085] $p=0.0000$	8.2960 (0.6237) [7.0737, 9.5183] $p=0.0000$

注：上位 15% の κ_W は推定上限 300 に到達している。当該パラメータの Wald 型推論は参考値であり、1 営業日付近への鋭い適合として慎重に解釈する必要がある。

本論文は所定の査読制度による審査を経たものである。

採択決定日：2026 年 7 月 28 日

日本大学経済学部 経済集志・研究紀要編集委員会